Diss. ETH Nr. 20336

Multi-Domain-Simulation in der Leistungselektronik

ABHANDLUNG Zur Erlangung des Titels DOKTOR DER WISSENSCHAFTEN der ETH ZÜRICH

vorgelegt von

ANDREAS MARKUS MÜSING

Dipl.-Phys., Universität Heidelberg geboren am 28. September 1979 in Heilbronn, Deutschland

Angenommen auf Antrag von: Prof. Dr. Johann W. Kolar, Referent Prof. Dr. Hans Ertl, Koreferent

Vorwort

Diese Doktorarbeit ist im Rahmen meiner Tätigkeit an der Professur für Leistungselektronik und Messtechnik (LEM) an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich in den Jahren 2006 bis 2012 entstanden.

Zunächst möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Johann W. Kolar danken, der es mir ermöglicht hat an seiner Professur eine Dissertation zu erstellen, die sehr interdisziplinär ist. Die Arbeit befasst sich nicht mit der Schaltungstechnik an sich, sondern mit physikalischen parasitären – und damit eigentlich ungewollten – Effekten, welche beim Design von leistungselektronischen Systemen berücksichtigt werden müssen.

Die Aufgabenbereiche während meiner Arbeit an der ETH Zürich waren deshalb mehr auf die physikalische Modellierung, Programmierung, Mathematik und Simulation fokussiert. Zusätzlich habe ich am LEM einen Überblick über die eher ingenieurwissenschaftlichen Themen meiner Kollegen erhalten. Mir als Physiker hat zusätzlich auch die Tätigkeit als Assistent in der Lehre zu einem fundierten Wissen in der Leistungselektronik verholfen.

Als nächstes möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Johann Ertl von der TU Wien herzlich bedanken, der sich freundlicherweise bereit erklärt hat das Koreferat zu übernehmen.

Viele Ideen dieser Arbeit kamen durch Diskussionen mit meinen Kollegen zustande, insbesondere möchte ich hier meine langjährigen Büronachbarn Dr. Uwe Drofenik und Frau Ivana Kovačević nennen. Letztendlich hat mich aber auch das gesamte LEM-Team mit seinem Enthusiasmus und dem damit verbundenen professionellen Arbeitsumfeld sehr unterstützt.

Eine Dissertation ist ohne die Unterstützung der Familie nicht möglich. Deshalb möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, welche in meinen jungen Jahren meine Neugierde, das Interesse am Basteln und dem Computer gefördert haben. Sie haben mir durch ihre andauernde Unterstützung das Studium ermöglicht. Abschliessend möchte ich mich bei meiner Frau Kim bedanken. Sie hat während meiner Dissertation viel Geduld und Rücksicht aufbringen müssen. Die Unterstützung und Liebe, welche sie mir dabei gegeben hat werde ich nie vergessen. Unser Sohn Philipp wurde vor wenigen Monaten geboren, er versteht es noch nicht, wenn ich ihm jetzt danke, aber ich möchte ihm diese Arbeit widmen und ihm eine schöne Zukunft wünschen!

 $F\ddot{u}r$ Philipp

Kurzfassung

Die Leistungselektronik entwickelt sich mehr und mehr zu einem interdisziplinären Fachgebiet. Neben der eigentlichen Schaltungstechnik spielen die Regelung, das thermische Verhalten, der Elektromagnetismus und damit verbunden die elektromagnetische Verträglichkeit (EMV) eine immer grössere Rolle. Die Anforderungen nach hoher Leistungsdichte, Effizienz und Systemintegration tragen dazu bei, dass die verschiedenen Domänen nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden können. Beispielsweise muss das thermische Verhalten beim Systemdesign berücksichtigt werden, um eine hohe Lebensdauer der Hardware zu gewährleisten. Leit- und Schaltverluste der Halbleiterkomponenten müssen genau modelliert werden, um thermische Modelle zu parametrisieren: Temperaturschwankungen der Komponenten haben eine Rückwirkung auf die Halbleiterverluste. Parasitäre Schaltungskomponenten wie Streuinduktivitäten und kapazitive Kopplungen haben Schaltüberspannungen, zusätzliche Verluste, oder ein schlechtes EMV-Verhalten des Konverters zur Folge. Um die Komplexität des Systemdesigns zu beherrschen, sind moderne Simulationstools die einzige Alternative zur iterativen und zeitaufwändigen experimentellen Optimierung von Hardware-Prototypen.

Software für 3D-Feldsimulationen ist heute durch fortschrittliche Algorithmen sehr leistungsfähig, jedoch ist die Kopplung der verschiedenen Domänen bei vielen Softwarepaketen nicht vorgesehen. Multi-Physics-Simulationstools führen durch eine direkte Kopplung der betrachteten Simulationsdomänen zu extrem langen Rechenzeiten und werden dadurch beinahe unbrauchbar.

Diese Arbeit beschäftigt sich deshalb mit der intelligenten Verknüpfung zwischen 3D-Feldsimulationen und einem schnellen Schaltungssimulator. Hierfür wird ein elektromagnetisches Simulationstool, basierend auf der PEEC-Methode (Partial Element Equivalent Circuit Method), entwickelt, welches die elektromagnetischen Eigenschaften dreidimensionaler Verbindungsstrukturen effizient berechnet. Dabei werden grundlegende Beiträge zur PEEC-Simulationsmethode vorgestellt, wie beispielsweise eine effiziente und genaue Berechnung der PEEC-Systemmatrixeinträge für schiefwinklige Zellen, oder die Erweiterung der PEEC-Formulierung auf zylindrische Zellen und zweidimensionale Probleme zur Verlustberechnung von Induktivitäten mit Folienleitern. Die Funktionalität des verwendeten PEEC-Solvers wird anhand von Beispielen aus der Leistungselektronik getestet und mit Messergebnissen verglichen.

Neben dem PEEC-Solver wird für die thermische Modellierung ein Finite-Differenzen-Solver entwickelt, der die Wärmeleitungsgleichung anhand thermischer Widerstände und Kapazitäten diskretisiert. Es wird gezeigt, dass die Interpretation der Systemgleichungen durch thermische Ersatznetzwerke mathematisch identisch ist mit der konventionellen Finite-Differenzen-Methode. Dadurch lässt sich der thermische Solver ohne grossen Mehraufwand in die gleiche Software-Plattform integrieren wie der elektromagnetische PEEC-Solver.

Die Verbindung der 3D-Feldsimulatoren mit einem für die Leistungselektronik optimierten Schaltungssimulator erfolgt über eine mathematische Modellordnungsreduktion. Da sowohl die PEEC-Methode als auch die thermische Finite-Differenzen-Methode auf ähnlichen Gleichungssystemen beruhen, lässt sich derselbe Algorithmus zur Modellordnungsreduktion auf beide Simulationsdomänen anwenden. Die verkleinerten Modelle können schliesslich sehr effizient in einem Schaltungssimulator verwendet werden. Die vorgestellte mathematische Ordnungsreduktion der Systemgleichungen basiert auf dem PRIMA-Verfahren, welches über den Block-Arnoldi Algorithmus Modelle mit einer stark verringerten Anzahl von Systemvariablen erzeugt. Die Qualität der Ordnungsreduktion wird durch einen Vergleich mit den ursprünglichen Simulationsmodellen verifiziert.

Als Ergebnis dieser Arbeit entsteht eine Simulationsplattform, durch welche thermische und elektromagnetische Modelle mit einem Schaltungssimulator verkoppelt werden können. Durch die anschauliche Interpretation mittels elektrischer bzw. thermischer Netzwerke sind die einzelnen Programmteile sehr benutzerfreundlich. Die automatisierte mathematische Ordnungsreduktion ermöglicht eine einfache und effiziente parallele Simulation der verschiedenen physikalischen Domänen.

Abstract

Power electronics is developing more and more into a multi-disciplinary engineering area. Besides the circuit technology itself, other aspects such as control issues, the thermal behavior of the system, electromagnetism and electromagnetic compatibility (EMC) are becoming important for a successful design of power electronics hardware. The requirements for high power density, high efficiency, and system integration are the main reasons why different physical domains cannot be considered as separate anymore. Thermal behavior, for instance, has to be considered during system design to ensure long-term functionality and reliability. Conduction and switching losses of semiconductor components must be modeled thoroughly for parametrizing thermal models. Furthermore, temperature variations have a feedback effect on semiconductor losses. Parasitic circuit components such as stray inductances and capacitive couplings lead to switching overvoltages, additional losses and degraded EMC performance of the converter system. In order to be able to handle the complexity of system design, modern simulation tools are required, which are probably the only alternative to time-consuming and expensive trial-and-error optimization of hardware prototypes.

Many different existing software packages for 3D field computations are available, and due to their advanced algorithms, these tools have the ability to solve complex modeling problems. However, the coupling between different simulation domains is often not forseen. Some multiphysics finite element solvers are available which tightly couple different physical domains, e.g. thermal and electrical co-simulation. The tight coupling leads to very large models and simulation times that are not acceptable for daily development tasks.

This work therefore focuses on the intelligent combination of 3D field simulations and a fast power electronics circuit simulator. Within this PhD project, an electromagnetic simulation tool was developed which is based on the Partial Element Equivalent Circuit method (PEEC). The PEEC solver is able to efficiently simulate the three-dimensional electromagnetic behavior of electronic interconnection structures, namely parasitic inductances and capacitances between conductors. Therefore, this work contributes to the PEEC approach itself, e.g. an efficient and accurate method for calculating the PEEC solver system matrix entries for volume and surface cells of non-orthogonal shape. The PEEC method is extended to include cylindrical cell shapes. Then, a new 2D approach using PEEC for calculating copper losses of inductors with foil windings was developed. The functionality of the developed PEEC solver is tested and verified on examples relevant to power electronics.

In addition to the electromagnetic solver, a Finite-Difference-Method (FDM) based thermal solver was implemented. It is mathematically shown that an interpretation of the FDM mesh via thermal resistances and capacitances is possible. Therefore, the thermal solver can be easily integrated into the same modeling framework as the PEEC solver.

The interoperability of the 3D field simulators with a power electronics circuit simulator is done via mathematical model order reduction. Since the PEEC solver as well as the thermal FDM solver produce similar equation systems, the same order reduction algorithm can be applied for both domains. The reduced-size models can finally be solved efficiently within the circuit simulator. The applied order reduction algorithm is based on a Krylov-subspace projection method called PRIMA, which guarantees model passivity.

The outcome of this work is a multi-domain simulation platform that is able to co-simulate electromagnetic as well as thermal models in combination with a circuit simulator. Since the field solver descriptions are also based on lumped circuit components, the usage of the entire simulation package is easy and intuitive.

Inhaltsverzeichnis

Vo	/orwort					
Kι	urzfas	ssung	v			
Ał	Abstract					
1	Einl 1.1 1.2 1.3 1.4	eitung Motivation	1 1 3 8 11			
2	Die 2.1	Methode der partiellen Elemente RLC Netzwerkgleichungen 2.1.1 Lösungen im Frequenzbereich 2.1.2 Integrationsmethoden im Zeitbereich	15 17 23 24			
	2.2 2.3	Herleitung der PEEC-MethodeBerechnung der Matrixeinträge der partiellen Elemente $2.3.1$ Elektrischer Widerstand $2.3.2$ Partielle Induktivitäten Lp $2.3.3$ Partielle Induktivitäten für orthogonale Zellen $2.3.4$ Partielle Induktivitäten für schiefwinklige Zellen $2.3.5$ Lp -Berechnung mittels Stromfäden $2.3.6$ Potentialkoeffizienten $2.3.7$ Analogie der Berechnung zwischen Lp und P	27 35 35 39 44 45 46 52 56			
	$2.4 \\ 2.5$	Erweiterung der PEEC-Methode auf zylindrische Zellen PEEC Modell einer Toroidspule	61 64			

3	Anwendungsbeispiele der PEEC-Methode				
	3.1	1 Stromaufteilung in einem IGBT Leistungsmodul .			
		3.1.1	Layout des Leistungsmoduls	71	
		3.1.2	Parasitäre Eigenschaften des Leistungspfades	72	
		3.1.3	Kommutierungspfad Ersatzmodell	75	
		3.1.4	Rückkopplung zwischen Leistungs- und Gatepfad	76	
		3.1.5	Schaltungssimulation der Stromaufteilung	79	
	3.2	Simul	ation einer Rogowski-Spule zur Strommessung	81	
		3.2.1	Rogowski-Spulen Ersatzmodell	82	
		3.2.2	Impedanz der Rogowski-Spule	83	
		3.2.3	Sensitivität der Strommessung	85	
	3.3	Verlus	stberechnung von Induktivitäten	88	
		3.3.1	Verlustberechnung für Rundleiter	89	
		3.3.2	Die PEEC-Methode in zwei Dimensionen	93	
		3.3.3	Die Spiegelungsmethode für PEEC-Modelle	96	
4	The	rmisch	e Modellierung	103	
	4.1	Die W	Värmeleitungsgleichung	104	
	4.2		inita Differenzan Methodo	105	
		Die F	Inite-Differenzen-Methode		
	4.3	Die Fi Thern	nisch-Elektrische Analogie	109	
	$4.3 \\ 4.4$	Die Fi Thern Linear	nite-Dinerenzen-Methode	$\begin{array}{c} 109 \\ 110 \end{array}$	
	$4.3 \\ 4.4 \\ 4.5$	Die Fi Thern Linear Randl	nite-Dinerenzen-Methode	109 110 113	
	$\begin{array}{c} 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \end{array}$	Die Fr Thern Linear Randl Matri	nite-Differenzen-Methode	$109 \\ 110 \\ 113 \\ 117$	
	$ \begin{array}{r} 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \end{array} $	Die F Thern Linean Randl Matrii 4.6.1	Inite-Differenzen-Methode	109 110 113 117 117	
	$ \begin{array}{r} 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \end{array} $	Die Fr Therm Linean Randl Matri: 4.6.1 4.6.2	Inite-Differenzen-Methode	109 110 113 117 117 119	
	$\begin{array}{c} 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \end{array}$	Die Frank Therm Lineau Randl Matri 4.6.1 4.6.2 4.6.3	Inite-Differenzen-Methode	109 110 113 117 117 119 121	
	$\begin{array}{c} 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \end{array}$	Die F Thern Linean Randl Matrix 4.6.1 4.6.2 4.6.3 4.6.4	ninte-Differenzen-Methode	$ \begin{array}{r} 109 \\ 110 \\ 113 \\ 117 \\ 117 \\ 119 \\ 121 \\ 124 \\ \end{array} $	
	$ \begin{array}{r} 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \\ 4.7 \\ \end{array} $	Die F Therm Lineau Randl Matri 4.6.1 4.6.2 4.6.3 4.6.4 Therm	Inite-Differenzen-Methode	109 110 113 117 117 119 121 124 130	
	$ \begin{array}{r} 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \\ \end{array} $ $ \begin{array}{r} 4.7 \\ 4.8 \\ \end{array} $	Die F Therm Lineau Randl Matri 4.6.1 4.6.2 4.6.3 4.6.4 Therm Skalie	Inite-Differenzen-Methode	$ \begin{array}{r} 109 \\ 110 \\ 113 \\ 117 \\ 117 \\ 119 \\ 121 \\ 124 \\ 130 \\ 134 \\ \end{array} $	
	$ \begin{array}{r} 4.3 \\ 4.4 \\ 4.5 \\ 4.6 \\ \end{array} $ $ \begin{array}{r} 4.7 \\ 4.8 \\ 4.9 \\ \end{array} $	Die F Therm Lineau Randl Matri 4.6.1 4.6.2 4.6.3 4.6.4 Therm Skalie Fehler	Inite-Differenzen-Methode	$ \begin{array}{r} 109 \\ 110 \\ 113 \\ 117 \\ 117 \\ 119 \\ 121 \\ 124 \\ 130 \\ 134 \\ 136 \\ \end{array} $	
	$ \begin{array}{r} 4.3\\ 4.4\\ 4.5\\ 4.6\\ \end{array} $ $ \begin{array}{r} 4.7\\ 4.8\\ 4.9\\ \end{array} $	Die F Therm Lineau Randl Matri 4.6.1 4.6.2 4.6.3 4.6.4 Therm Skalie Fehler 4.9.1	Inite-Differenzen-Methode	$ \begin{array}{r} 109 \\ 110 \\ 113 \\ 117 \\ 117 \\ 119 \\ 121 \\ 124 \\ 130 \\ 134 \\ 136 \\ 136 \\ 136 \\ \end{array} $	

5	Modellordnungsreduktion			145			
	5.1	Modellordnungsreduktionsverfahren – eine Übersicht		147			
		5.1.1	Einfache Kurven-Approximationsverfahren	147			
		5.1.2	Thermische Foster- und Cauer-Ersatznetzwerke .	148			
		5.1.3	MOR durch Netzwerkumformungen	152			
		5.1.4	TBR-basierte Modellordnungsreduktion	154			
		5.1.5	Asymptotic Waveform Evaluation	158			
	5.2	Krylov	Krylov-Unterraum-Methode, PRIMA				
		5.2.1	$\label{eq:projections} Projections basic terms Modellord nungsreduction \ . \ .$	161			
		5.2.2	Das Block-Arnoldi Verfahren	162			
		5.2.3	PRIMA	164			
	5.3	Anwer	ndungsbeispiele	166			
		5.3.1	Thermische Modellordnungsreduktion	166			
		5.3.2	$eq:electromagnetische Modellordnungsreduktion \ . \ .$	176			
6	Zus	Zusammenfassung					
7	Ausblick						
Α	Ana	lytische	e Formeln zur Berechnung partieller Elemente	191			
	A.1	Koppl	ungsinduktivitäten orthogonaler Stromzellen	192			
	A.2	Selbst	induktivität quaderförmiger Zellen	193			
	A.3	Belieb	ig angeordnete Stromfäden	194			
В	Implementierung des Block-Arnoldi Verfahrens						
Lit	Literaturverzeichnis						
Ał	Abbildungsverzeichnis						
Та	Tabellenverzeichnis						

1 Einleitung

1.1 Motivation

In der heutigen technisierten Gesellschaft ist die zuverlässige Verfügbarkeit von elektrischer Energie schon lange zum Standard geworden. Beinahe jedes elektronische Gerät verfügt über leistungselektronische Komponenten. Oft werden diese vom Benutzer nicht bewusst wahrgenommen, da die elektronischen Energiewandler in das Gesamtsystem integriert werden, und erst eine Fehlfunktion der Leistungselektronik rückt diese in den direkten Fokus des Benutzers.

Betrachtet man die gesamte Kette von der Energieerzeugung bis zum Verbraucher stellt man fest, dass immer häufiger elektronische Energiewandler zum Einsatz kommen. Diese versprechen im Vergleich zu herkömmlichen Energiewandlern ein geringeres Gewicht, einen besseren Wirkungsgrad oder stellen – z.B. ist im Falle von Hochspannungs-Gleichstromübertragung für Offshore-Windparks – die einzige Möglichkeit dar, eine effiziente Energieübertragung zu gewährleisten.

In den letzten Jahren hat aufgrund der Debatte über die endliche Verfügbarkeit fossiler Brennstoffe ein Paradigmenwechsel in der Politik und im Bewusstsein der Menschen stattgefunden: Der Einsatz von erneuerbaren Energien wie der Wind-, Wasser- oder Sonnenenergie wird in einigen Staaten finanziell stark gefördert; die Preise erneuerbarer Energien werden vom Endverbraucher aufgrund des umweltfreundlichen Images akzeptiert. Die Folgen der nuklearen Katastrophe in Fukushima haben diesen Trend zu erneuerbaren Energien verstärkt, da die Kernenergie, als mögliche Alternative zur fossilen Energiegewinnung, zu risikobehaftet und vom Menschen auf Dauer nicht beherrschbar erscheint. Folglich wird sich die Anzahl der leistungselektronischen Konverter innerhalb der Energieversorgung in den kommenden Jahren stark vergrössern, denn jede Solaranlage oder Windkraftanlage erfordert eine Energieumformung zur Einspeisung ins Netz.

Der zweite Ansatz einer umweltverträglicheren Energiewirtschaft ist bei den Verbrauchern zu suchen: Zum Einen verringert ein Effizienzgewinn durch den geschickten Einsatz von Leistungselektronik den gesamten Energiebedarf. Andererseits werden viele Verbraucher durch eine zunehmende Elektrifizierung umweltfreundlichher. In der Elektromobilität kann das heute erhältliche Hybridfahrzeug nur als wichtiger Zwischenschritt zum vollständig batteriebetriebenen Fahrzeug gesehen werden. Neben der Batterietechnik ist die Leistungselektronik eine der Schlüsseltechnologien zur Elektromobilität. Auch Transportmittel, bei denen der Einsatz von Leistungselektronik auf den ersten Blick nicht offensichtlich erscheint, können von dieser Technologie profitieren. Beispielsweise ist der Einsatz von elektrischen Stellgliedern in Flugzeugen in der Entwicklung, sodass schwere hydraulische Komponenten durch leichtere Komponenten ersetzt werden [1]. In der Mobilität ist der Effizienzgewinn nicht nur durch bessere Wirkungsgrade zu erreichen, sondern auch durch eine wesentliche Gewichtsersparnis durch den Einsatz neuer Technologien.

Um die korrekte Funktionsweise leistungselektronischer Konverter sicherzustellen, dürfen die Systeme nicht nur als einzelne Baugruppen aufgefasst werden, sondern es ist auch deren Interaktion zu betrachten. Ein wichtiger Punkt hierbei ist die elektromagnetische Verträglichkeit (EMV). Verschiedene gesetzliche Normen regeln, wie gross die Störungen sein dürfen, die ein System in das Netz einspeist. Eine Einhaltung der Normen soll sicherstellen, dass sich verschiedene Systeme nicht gegenseitig stören; EMV-Filter sind deshalb ein integraler Bestandteil der Leistungselektronik. Diese begrenzen nicht nur das ins Netz abgegebene Störspektrum, sondern bilden in umgekehrter Richtung auch eine Barriere für Störsignale aus dem Netz, welche die Funktionalität eines Systems beeinträchtigen könnten.

Ein weiterer Aspekt, der aufgrund der zunehmenden Elektrifizierung an Bedeutung gewinnt, ist die Zuverlässigkeit der Systeme. Je häufiger elektronische Energiewandler zum Einsatz kommen, desto grösser wird die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls im Gesamtsystem. Deshalb ist bei einer Optimierung eines Konverters eine Betrachtung der Systemlebensdauer und Zuverlässigkeit wichtig, welche letztendlich auf den thermischen Eigenschaften und dem Verhalten der elektronischen Komponenten beruht.

Um die Miniaturisierung, Effizienzsteigerung, Systemintegration und die Zuverlässigkeit der Leistungselektronik voranzutreiben ist ein tieferes Verständnis der grundlegenden physikalischen Vorgänge erforderlich. Moderne Simulationstools können hierfür einen wesentlichen Beitrag leisten. Durch die fortschreitende Systemintegration wird dabei eine interdisziplinäre Betrachtung des Gesamtsystems immer wichtiger. Der Entwicklungsingenieur benötigt deshalb Werkzeuge, die nicht nur die Schaltungstechnik selbst abbilden, sondern auch alle damit verbundenen wesentlichen Aspekte abdecken, wie z. B. die Systemregelung, DSP-Programmierung, das thermische Verhalten, EMV, Zuverlässigkeit, Kosten, Halbleitertechnik, magnetische Materialien, Verbindungstechnik, Mechanik,

Diese Interdisziplinarität spiegelt den Inhalt dieser Arbeit wieder, in der neben der Modellierung des elektromagnetischen Verhaltens leistungselektronischer Systeme auch die thermische Modellierung und die EMV eine Rolle spielen. Nach einer Betrachtung der verschiedenen numerischen Methoden wird eine Systembetrachtung angestrebt, bei der durch eine Ordnungsreduktion der ursprünglich sehr detaillierten Modelle der numerische Aufwand soweit reduziert wird, sodass eine Systemsimulation möglich wird.

1.2 Simulation in der Leistungselektronik

Die numerische Simulation ist bereits heute in der Entwicklung leistungselektronischer Hardware selbstverständlich [2, 3]. Durch Computersimulationen können neue Konzepte schnell und effizient auf ihre Praxistauglichkeit überprüft werden, ohne dabei die hohen Kosten und den Personal- und Zeitaufwand investieren zu müssen, die der Entwurf eines Hardware-Prototypen erfordern würde. Der Bau von Prototypen ist nicht nur aufgrund der eingesetzten Komponenten teuer, auch die Laborausrüstung, Spannungsversorgungen, Mess- und Sicherheitsausrüstung und schliesslich die investierte Arbeitszeit sind hierbei zu berücksichtigen. Falls sich die untersuchten Konzepte als unbrauchbar erweisen, findet beim computergestützen Entwurf keine Zerstörung elektronischer Komponenten statt, sondern der Entwicklungsingenieur erhält aus Simulationsmodellen wertvolle Informationen, z. B. über zu hohe Spannungen, Ströme oder Temperaturen, welche die maximale Belastbarkeit von Halbleitern oder anderen Komponenten übersteigen.

Die kritischen Designparameter können dabei in der Simulation genau erfasst und reproduziert werden, was beim Hardware-Prototyping einen grossen Messaufwand erfordern würde. Dadurch wird eine detaillierte Analyse oft erst ermöglicht, und Schwachstellen eines Designs können schon vor dem Bau jeglicher Hardware identifiziert werden. Ein weiterer Vorteil des computergestützten Hardware-Entwurfs ist, dass Feldgrössen wie Temperaturverteilungen, Stromflüsse und Spannungsverteilungen schnell visualisiert werden können, sodass Software letztendlich auch zum Verständnis des Systems und der Interaktion von dessen Komponenten beiträgt.

Häufig werden Simulationsmodelle zur Verbesserung bestehender Designs verwendet, indem die vorhandenen Systemparameter in der Simulation variiert werden, um eine verbesserte Effizienz, Leistungsdichte oder Lebensdauer zu erhalten. Simulationstools, welche ausreichend effizient und schnell sind, können damit auch zur automatisierten rechnergestützten Optimierung verwendet werden, bei der durch eine methodische Variation im sinnvollen Parameterraum eine oder mehrere kritische Systemgrössen optimiert werden.

Aus den oben gennanten Gründen ist es wünschenswert, möglichst viele Aufgaben des Hardwareentwurfs auf Computersimulationen zu beschränken. Leider können Simulationsmodelle die Realität niemals vollständig abbilden. Um die Simulationszeit der Modelle auf ein sinnvolles Mass zu beschränken, sind mehrere Stufen der Modellabstraktion und Vereinfachung nötig. Aus vereinfachten Modellen erhält der Anwender schliesslich immer eine numerische Lösung, aber ob diese Ergebnisse sinnvoll und ausreichend genau sind, muss letztendlich der Softwareanwender aufgrund seines Wissens und der Erfahrung beurteilen können.

Der heutigen Stand der Technik ist, dass für beinahe jede Anwendung sehr spezialisierte Softwarewerkzeuge zur Verfügung stehen. Beispielsweise können auf physikalischen Gleichungen basierte Tools beim Entwurf neuer Halbleiterschalter verwendet werden, thermische Simulationstools sind in der Lage komplizierte fluiddynamische Probleme zu lösen, und über verschiedene Finite-Elemte-Programme lassen sich elektromagnetische Feldprobleme mit nichtlinearen Materialeigenschaften lösen, um nur eine sehr kleine Auswahl an Beispielen zu nennen.

Die grosse Schwierigkeit ist jedoch, dass die Bedienung jedes dieser Softwarewerkzeuge einen Experten benötigt, der im jeweiligen Bereich ausreichend geschult ist, um grobe Modellierungsfehler zu vermeiden. Aufgrund des interdisziplinären Charakters der Leistungselektronik sind kaum Ingenieure zu finden, die das gesamte nötige Wissensspektrum abdecken. Selbst in Teams einer Enwicklungsabeilung ist der Wissensbedarf mit den vorhandenen Mitarbeitern oft schwer abzudecken, und die Kommunikation verschiedener Entwicklungsabteilungen ist nicht immer optimal.

Die Interdisziplinarität der Leistungselektronik stellt aber nicht nur hohe Anforderungen an das Entwicklungspersonal, auch die Software selbst muss von Grund auf für die Kommunikation mit anderen Werkzeugen aufgebaut sein, oder muss zumindest einen Export von vereinfachten Modellen zulassen. Genau dieser Punkt wird von der derzeit verfügbaren Software nur mangelhaft abgedeckt.

Es existieren zwar sogenannte Multi-Physics-Simulationstools, welche versuchen die verschiedenen physikalischen Domänen auf eine direkte Weise miteinander zu koppeln. Die Rechengeschwindigkeit und der Speicherbedarf dieser Tools sind aber so hoch, dass sie für den praktischen und alltäglichen Einsatz nicht geeignet sind. Die einzige dem Autor bekannte Software, welche über eine Modellordnungsreduktion verschiedene physikalischen Domänen effizient miteinander verkoppelt ist "mor4ansys" [4], welche speziell für das Design Mikromechanischer Systeme eingesetzt wird.

Um diese Lücke zu schliessen wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Teil der Software-Plattform "Gecko" aufgebaut, in welcher speziell der interdisziplinäre Charakter der Leistungselektronik abgedeckt werden soll. Abbildung 1.1 zeigt eine Übersicht der verschiedenen Bausteine der Softwareplattform. Im Mittelpunkt steht hier der Schaltungssimulator "GeckoCIRCUITS", über welchen die weiteren Simulationsblöcke zugreifbar und verknüpft sind. Der speziell für die Leistungselektronik optimierte Schaltungssimulator ist das zentrale Bindeglied, da dieser eine Abstraktionsstufe über den detaillierten Feldsimulationen steht. Der Benutzer, in der Regel ein Elektroingenieur mit dem Fachwissen aus der Leistungselektronik, kann mit GeckoCIRCUITS die gewünschte Schaltungstopologie zusammen mit einem Regelungsmodell aufbauen, und somit die Basis für eine Simulation in mehreren Domänen erstellen. Ein Bildschirmfoto der Benutzeroberfläche von GeckoCIRCUITS ist in Abbildung 1.2 gezeigt. Hier sind bereits mehrere relevante Domänen für den Hardwareentwurf eingeschlossen:

1. Die Schaltungssimulation (blaue Symbole im GeckoCIRCUITS Arbeitsbereich): Verschiedene idealisierte Halbleiterkomponenten sowie passive und nichtlineare Bauelemente stehen in der Bauteil-



Abb. 1.1: Übersicht zur Softwareplattform Gecko, welche die Bedürfnisse für eine Multi-Domain Simulation in der Leistungselektronik erfüllt.



Abb. 1.2: Bildschirmfoto des Schaltungssimulators GeckoCIRCUITS.

bibliothek zur Verfügung. Da standardmässig vereinfachte Halbleitermodelle verwendet werden, ist GeckoCIRCUITS im Vergleich zu SPICE-ähnlichen Simulationsprogrammen extrem schnell. In SPICE werden die Schaltungsgleichungen anhand nichtlinearer Gleichungen gelöst, die Diode (in der einfachsten Form der SPICE-Simulation) wird beispielsweise über eine Diodencharakteristik mit einer Exponentialfunktion dargestellt. Dies führt zwingend zu iterativen Lösungsalgorithmen mit variabler Schrittweite. Jeder Simulationszeitschritt besteht aus einer Anzahl von Iterationsschritten und Verfeinerungen der Schrittweite, bis die nichtlineare Lösung schliesslich konvergiert. Schaltvorgänge von Dioden oder Leistungstransistoren führen in der Regel zu SPICE-Simulationen mit sehr kleinen Schrittweiten und vielen Iterationen.

GeckoCIRCUITS arbeitet stattdessen mit stückweise linearisierten Bauteilkomponenten, d.h. die Diode wird beispielsweise über einen Vorwärtsspannungsabfall und zwei unterschiedliche Widerstandswerte im durchgeschalteten und sperrenden Zustand modelliert. Für Leistungselektronik-Anwendungen hat sich gezeigt, dass GeckoCIRCUITS um Grössenordnungen schneller ist als ein detailliertes SPICE-Modell.

2. Regelung (grüne Symbole im GeckoCIRCUITS-Arbeitsfeld): Ähnlich zum Quasistandard der Regelungstechnik, Simulink für Matlab, können auch in GeckoCIRCUITS komplexe Regelungsmodelle erstellt werden. Hierfür steht eine umfangreiche Regelungsbibliothek zur Verfügung, welche es dem Benutzer erlaubt leistungsfähige Reglermodelle zu entwerfen. In der Regelungsbibliothek stehen ausserdem zahlreiche Möglichkeiten der Datenvisualisierung und einer Nachbearbeitung der Simulationsdaten zur Verfügung, wie z. B. die Fourier-Transformation oder die Berechnung von Schaltungskennwerten, THD, Leistungsfaktor, usw.

Eine Schnittstelle zur DSP-nahen Programmierung ist durch einen Funktionsblock gegeben, in dem beliebige Regelungsverfahren direkt in der Form von Software-Quellcode eingegeben werden.

3. Kombinierte elektrisch-thermische Simulation (rote Schaltungssymbole): Durch thermische Ersatzschaltungen können transiente Temperaturverläufe der Schaltungsbauelemente berechnet werden. Die Verlustleistungen der Schaltungskomponenten werden entweder direkt aus der elektrischen Simulation gewonnen, oder wahlweise durch eine vom Benutzer spezifizierte Parametertabelle berechnet. Damit besteht auch die Möglichkeit einer Rückkopplung beider Domänen: Schalt- und Leitverluste von Halbleitern können temperaturabhängig berechnet werden, sodass die gegenseitige Wechselwirkung näherungsweise korrekt abgebildet wird.

1.3 Inhalt und Übersicht dieser Arbeit

In den folgenden Kapiteln werden wird die 3D-Feldsimulation von thermischen und elektromagnetischen Modellen detailliert besprochen. Es hat sich herausgestellt, dass sowohl die Wärmeleitungsgleichung als auch die Maxwellgleichungen durch Modelle mit diskreten Komponenten, ähnlich wie sie in der Schaltungstechnnik verwendet werden, effizient simulieren lassen. Dabei ist zu betonen, dass die Modellierung durch diskrete Komponenten sich direkt aus den entsprechenden Differentialgleichungen ableiten lässt, d. h. bis auf Diskretisierungsfehler werden die Feldprobleme damit exakt im Modell abgebildet.

Für elektromagnetische Probleme wird die Schaltungsbeschreibung von dreidimensionalen Leiterstrukturen und deren parasitären Eigenschaften durch die PEEC-Methode (Partial Element Equivalent Circuit Method) gegeben [5], das thermische Äquivalent hierzu ist die Finite-Differenzen-Methode (FDM).

Der inhaltliche Aufbau dieser Arbeit gestaltet sich folgendermassen:

In Kapitel 2 wird die Methode der partiellen Elemente im Detail besprochen. Dabei wird eine vollständige Herleitung der Methode aus den Maxwellgleichungen gezeigt. Ein wesentlicher Bestandteil der PEEC-Methode ist die korrekte Berechnung der Matrixeinträge der magnetischen und elektrischen Feldkopplungen. Für einfache Geometrien, z. B. orthogonale Volumenzellen, können diese aus analytischen Zusammenhängen effizient berechnet werden. Bei komplizierteren geometrische Verhältnissen im Modell wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Verfahren entwickelt, dass die Berechnung der Matrixeinträge mittels numerisch effizienten und genauen Näherungsverfahren zulässt. Aufgrund mathematischer Analogien der involvierten Gleichungen kann diese neue Methode sowohl für die Berechnung der induktiven Kopplung als auch der kapazitiven Kopplung verwendet werden. Ausserdem wurde die PEEC-Methode so erweitert, dass neben den sonst üblichen quaderförmigen Diskretisierungen auch zylindrische Zellen verwendet werden können. Dadurch erhält man eine erhöhte Genauigkeit der Modellierung für entsprechende Anwendungsfälle bei einem verkleinerten numerischen Aufwand.

In Kapitel 3 werden zwei Anwendungsbeispiele der PEEC Methode aus der Leistungselektronik vorgestellt. Die layoutbedingte Stromverteilung innerhalb eines Versuchsaufbaus, welcher ein Press-Pack Leistungsmodul als Halbleiterschalter verwendet, wird im Detail diskutiert. Das zweite Beispiel beinhaltet die Modellierung und Optimierung einer Rogowski-Spule zur Strommessung des im vorherigen Abschnitt besprochenen Versuchsaufbaus. Die Simulationsergebnisse werden mit Messdaten eines Prototypen der Rogowski-Spule verifiziert.

Die thermische Modellierung, beispielsweise zur Simulation der transienten Temperaturverteilungen in Leistungsmodulen, ist Inhalt des 4. Kapitels. Die Wärmeleitungsgleichung bildet die Grundlage für thermische Simulationen, eine Herleitung der Finite-Differenzen-Methode aus der Differentialgleichung wird in diesem Kapitel gezeigt. Ein Vergleich zwischen PEEC Systemmatrizen und den FDM-basierten Gleichungssystemen verdeutlicht, das die FDM-Darstellung identisch ist mit einer Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung durch thermische Widerstände und thermische Kapazitäten. In der Literatur wird dies oft missverständlich dargestellt, oder sogar als zwei verschiedene Methoden aufgefasst.

Zusätzlich wird eine effiziente Implementierung von nichtlinearen Materialeigenschaften vorgestellt: Temperaturabhängige Wärmewiderstände und Kapazitäten werden durch eine Analogie zwischen elektrischen und thermischen Grössen eingeführt. Insbesondere nichtlineare Kapazitäten erfordern eine genaue Betrachtung da bei einer unsorgfältigen Implementierung unphysikalische Simulationsergebnisse resultieren.

In Kapitel 5 werden zunächst mehrere Methoden zur Modellordnungsreduktion linearer Systeme besprochen. Für grosse Simulationsmodelle scheinen die auf dem Krylov-Unterraumverfahren basierenden Methoden zur Ordnungsreduktion am besten geeignet zu sein. Insbesondere das PRIMA-Verfahren erzeugt aus den ursprünglich passiven Modellen ein garantiert passives ordnungsreduziertes Modell. Da sowohl der thermische FDM-Solver als auch der elektromagnetische PEEC-Solver eine ähnliche Gleichungsstruktur der Lösungsmatrizen aufweisen, ist dasselbe Reduktionsverfahren für beide Domänen anwendbar. Anhand numerischer Beispiele wird die Ordnungsreduktion für ein thermisches und ein elektromagnetisches Modell durchgeführt, und mit den Simulationsergebnissen der grösseren Originalmodelle verglichen. Für thermische ordnungsreduzierte Modelle können die aus dem PRIMA-Verfahren resultierenden Gleichungssysteme für Multiport-Modelle weiter vereinfacht werden. Dadurch skaliert das Ordnungsreduktionsverfahren auch für Multi-Chip Leistungsmodule mit sehr vielen Wärmequellen, sodass eine thermische Simulation ohne grossen Mehraufwand mit der Schaltungssimulation kombiniert werden kann.

1.4 Publikationsliste

Im Zusammenhang mit dieser Arbeit wurden die folgenden Beiträge auf internationalen Konferenzen und Fachzeitschriften veröffentlicht:

Konferenzbeiträge

- A. Müsing, M. L. Heldwein, T. Friedli, and J. W. Kolar, "Steps Towards Prediction of Conducted Emission Levels of an RB-IGBT Indirect Matrix Converter," in *Proc. of the 4th Power Conversion Conference (PCC)*, Nagoya, April 2007.
- U. Drofenik, D. Cottet, A. Müsing, J.-M. Meyer, and J. W. Kolar, "Computationally Efficient Integration of Complex Thermal Multi-Chip Power Module Models into Circuit Simulators," in *Proc. of the 4th Power Conversion Conference (PCC)*, Nagoya, April 2007.
- U. Drofenik, D. Cottet, A. Müsing, and J. W. Kolar, "Design Tools for Power Electronics: Trends and Innovations," in *Proc. of* the 2nd Int. Conference on Automotive Power Electronics (APE), Paris, September 2007.
- U. Drofenik, D. Cottet, A. Müsing, J.-M. Meyer, and J. W. Kolar, "Modelling the Thermal Coupling between Internal Power Semiconductor Dies of a Water-Cooled 3300V/1200A HiPak IGBT Module," in *Proc. of the Conference for Power Electronics, Intelligent Motion, Power Quality (PCIM)*, Nürnberg, Mai 2007.
- M. Hartmann, A. Müsing, and J. W. Kolar, "Switching Transient Shaping of RF Power MOSFETs for a 2.5 MHz, Three-Phase PFC," in *Proc. of the 7th Int. Conference on Power Electronics (ICPE)*, 2007.
- A. Müsing, J. Ekman, and J. W. Kolar, "Efficient Calculation of Non-Orthogonal Partial Elements for the PEEC Method," in Proc. of the 13th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC), Athen, Mai 2008.
- A. Müsing and J. Kolar, "Efficient Partial Element Calculation and the Extension to Cylindrical Elements for the PEEC Method," Proc. of the 11th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL), Zürich, August 2008.

- J. Biela, J. W. Kolar, A. Stupar, U. Drofenik, and A. Müsing, "Towards Virtual Prototyping and Comprehensive Multi-Objective Optimisation in Power Electronics," in *Proc. of the Int. Power Conversion and Intelligent Motion (PCIM) Conference Europe*, Nürnberg, Mai 2010.
- U. Drofenik, A. Müsing, and J. W. Kolar, "Voltage-Dependent Capacitors in Power Electronic Multi-Domain Simulations," in *Proc.* of the Int. Power Electronics Conference (IPEC), Sapporo, Juni 2010.
- I. Kovačević, A. Müsing, and J. W. Kolar, "PEEC Modeling of Toroidal Magnetic Inductor in Frequency Domain," in *Int. Power Electronic Conference (IPEC)*, Sapporo, Juni 2010.
- A. Müsing, G. Ortiz, and J. W. Kolar, "Optimization of the Current Distribution in Press-Pack High Power IGBT Modules," in *Proc. of the Int. Power Electronics Conference (IPEC)*, Sapporo, Juni 2010.
- U. Drofenik, A. Müsing, and J. W. Kolar, "Novel Online Simulator for Education of Power Electronics and Electrical Engineering," in *Proc. of the Int. Power Electronics Conference (ECCE Asia)*, Sapporo, Juni 2010.
- G. Ortiz, A. Müsing, J. Biela, D. Bortis, and J. W. Kolar, "A 180 MW, 450 kV Solid State Modulator Based on Press Pack IGBT Technology," in *Proc. of the IEEE Int. Power Modulator and High Voltage Conference (IPMHVC 2010)*, Atlanta, Mai 2010.
- I. Kovačević, T. Friedli, and J. W. Kolar, "A Full PEEC Modeling of EMI Filter Inductors in Frequency Domain," in Proc. of the 18th Int. Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG), Sydney, Juli 2011.
- I. Kovačević, T. Friedli, A. Müsing, and J. W. Kolar, "PEECbased Virtual Design of EMI Input Filters," in *Proc. of the 3rd IEEE Energy Conversion Congress (ECCE)*, Phoenix, September 2011.
- A. Müsing, U. Drofenik, and J. W. Kolar, "New Circuit Simulation Applets for Online Education in Power Electronics," in *Proc. of the* 5th IEEE Int. Conference on E-Learning on Industrial Electronics (ICELIE 2011), Melbourne, November 2011.

- I. Kovačević, A. Müsing, T. Friedli, and J. W. Kolar, "Electromagnetic Modeling of EMI Input Filters," in *Proc. of the Int. Conference on Integrated Power Electronics Systems (CIPS)*, Nürnberg, März 2012.
- T. Guillod, D. Gerber, J. Biela, and A. Müsing, "Design of a PCB Rogowski Coil based on the PEEC Method," in *Proc. of the Int. Conference on Integrated Power Electronics Systems (CIPS)*, Nürnberg, März 2012.
- E. Hoene, A. Ostmann, B. T. Lai, C. Marczok, A. Müsing, and J. W. Kolar, "Ultra-Low-Inductance Power Module for Fast Switching Semiconductors," in *Proc. of the Int. Power Conversion and Intelligent Motion (PCIM) Conference Europe*, Nürnberg, Mai 2013.

Journalbeiträge

- U. Drofenik, D. Cottet, A. Müsing, and J. W. Kolar, "Design Tools for Power Electronics: Trends and Innovations," *Ingenieurs de l'automobile*, Nr. 791, S. 55–62, September 2007.
- A. Müsing, J. Ekman, and J. W. Kolar, "Efficient Calculation of Non-Orthogonal Partial Elements for the PEEC Method," *IEEE Trans. on Magnetics*, Nr. 45(3), S. 1140–1143, März 2009.
- I. Kovačević, A. Müsing, and J. W. Kolar, "An Extension of PEEC Method for Magnetic Materials Modeling in Frequency Domain," *IEEE Trans. on Magnetics*, Nr. 47(5), S. 910–913, Mai 2011.

2 Die Methode der partiellen Elemente

Die Grundlagen der Methode der partiellen Elemente (PEEC, Partial Element Equivalent Circuit Method) wurden bereits in den Jahren 1972-1974 von Albert Ruehli erarbeitet [6], [5]. Die Verbesserung der PEEC-Methode ist momentan immer noch Gegenstand der Forschung.

Im Gegensatz zu den Methoden der Finiten-Differenzen (FDM) oder Finiten-Elemente (FEM), welche auf der differentiellen Form der Maxwell-Gleichungen basieren, ist die PEEC Methode auf der Lösung einer Integralgleichung – der "Electric Field Integral Equation" (EFIE) – aufgebaut. Eine Herleitung der Methode ist im Abschnitt 2.2 angegeben. Hier sollen zunächst die prinzipiellen Ansätze und Vorteile von PEEC gegenüber anderen Lösungsmethoden besprochen werden.

Der PEEC-Ansatz besteht darin, Leitergeometrien durch diskrete Bauteile (RLC) zu modellieren. Dabei wird eine Leitergeometrie in Volumenund Oberflächenzellen zerlegt. Ähnlich der Finite-Differenzen-Methode (Yee Gitter) wird dabei ein Versatz um eine halbe Zellenlänge zwischen Oberflächenzellen und Volumenzellen verwendet.

Stromführende Volumenzellen werden mithilfe von diskreten Zellwiderständen und Zellinduktivitäten modelliert. Die Induktivitäten dienen zur Modellierung der Wirkung des magnetischen Feldes \boldsymbol{B} , wobei nicht nur die Eigeninduktivitäten der Zellen berücksichtigt werden müssen, sondern durch Kopplungsinduktivitäten sind prinzipiell alle Volumenzellen magnetisch miteinander verbunden. Dies führt auf eine Induktivitätsmatrix \boldsymbol{L} , deren Diagonaleinträge die Eigeninduktivitäten der Zellen sind; alle weiteren Matrixeinträge sind Kopplungsinduktivitäten zwischen Zellenpaaren.

Die Wirkung des elektrischen Feldes E wird durch Einführung von Kopplungskapazitäten zwischen Oberflächenzellen erreicht, was in einer Kapazitätsmatrix C bzw. deren Inversen, der Potentialkoeffizientenmatrix $P = C^{-1}$ zum Ausdruck kommt.

Insgesamt wird mithilfe der PEEC-Methode eine Leitergeometrie in ein sehr grosses elektrisches Netzwerk übersetzt, welches schliesslich wahlweise im Zeitbereich oder im Frequenzbereich gelöst werden kann. Da das Modell selbst aus diskreten Komponenten besteht, können einfacherweise die Modellanregungen direkt als Spannungs- oder Stromquellen implementiert werden. Desweiteren können die in einer elektronischen Schaltung vorhandenen Komponenten, z. B. Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten, sehr einfach zum Modell hinzugefügt werden. Diese praktische Eigenschaft sorgt dafür, dass der PEEC Ansatz insbesondere für elektromagnetische Simulationen verwendet wird, in welchen Kombinationen aus Schaltung und Schaltungslayout relevant sind.

Durch den Integralgleichungsansatz hat die PEEC-Methode zusammengefasst die folgende Vorteile im Vergleich zur FEM oder FDM:

- Da die Berechnung der Kopplungsmatrizen L und P ausschliesslich aufgrund der Leiterzellgeometrien durchgeführt wird, ist die explizite Definition von Randbedingungen innerhalb einer Modell-Box – wie z. B. bei der FEM – nicht nötig.
- Die Diskretierungsgrösse der Zellen kann oft sehr grob gewählt werden, wobei der PEEC Ansatz immer noch eine näherungsweise korrekte Lösung ergibt. Es sollte lediglich darauf geachtet werden, dass die Zellengrösse und Auflösung so gewählt sind, dass Skinund Proximityeffekt korrekt abgebildet werden können.
- Obige Punkte ergeben im Allgemeinen, dass PEEC-Simulationsmodelle sehr viel weniger zu berechnende Lösungsvariablen verlangen, als vergleichbare FEM Modelle. Damit lassen sich die Matrizengleichungen schneller lösen.
- Die Lösungsvariablen einer PEEC-Simulation sind die Zellenströme und Knotenspannungen, die für den Elektroingenieur sehr anschauliche Grössen darstellen. FEM oder FDM hingegen lösen elektromagnetische Probleme in Form der Feldvariablen *B* und *E*, was einen gewissen Nachbearbeitungsaufwand erfordert, um letztendlich Ströme und Spannungen darzustellen. Trotzdem können, falls gewünscht, auch mit der PEEC-Methode Feldverteilungen von *B* und *E* dargestellt werden, indem anhand der Gesetze von Biot-Savart und Coulomb über die Lösungen der Strom- und Spannungsverteilung integriert wird.
- Die PEEC-Formulierung als RLC-Modell oder in Form von Zu-

standsraummodellen erlaubt eine einfache Modellordnungsreduktion, sodass die wesentlichen Eigenschaften sehr grosser elektromagnetischer Modelle in kompakter Form in einer kombinierten Schaltungs- und elektromagnetischen Simulation verwendet werden können.

Natürlich haben neben der PEEC-Methode auch die FEM, FDM, die Methode der Momente (MoM), usw. ihre speziellen Stärken und Einsatzgebiete. Die Methode der Finiten-Elemente ist beispielsweise immer dann von Vorteil, falls komplexe Materialeigenschaften, wie z. B. nichtlineare Permeabilitäten die Modelleigenschaften dominieren. In der Leistungselektronik werden parasitäre Schaltungseigenschaften von Busbars, PCBs oder Leistungsmodulen typischerweise nicht von permeablen Materialeigenschaften beeinflusst. Damit ist die PEEC-Methode für die Berechnung parasitärer Effekte am besten geeignet.

Die Modellierung von vollständigen EMV-Filtern mittels PEEC erfordert eine detaillierte Simulation der magnetischen Komponenten. Für Toroid-Kerne wurde in [7] eine Erweiterung der PEEC-Methode vorgeschlagen, womit über eine auf Oberflächen basierten Beschreibung die permeablen Eigenschaften der Kerne im Modell berücksichtigt werden. Mit dieser Erweiterung ist schliesslich die Berechnung der relevanten Filterübertragungsfunktionen möglich [8].

Heute gibt es leider nur eine sehr beschränkte Auswahl an Software, welche auf dem PEEC-Ansatz aufbaut. Als Open-Source- oder kommerzielle Software sind zurzeit die Programme FastHenry/FastCap [9, 10, 11], Inca3D [12], PCBMod [13] erhältlich. Jedoch ist entweder der Sourcecode dieser Programme unzugänglich, oder wesentliche Einschränkungen der jeweiligen Solver sind vorhanden, weshalb im Rahmen dieser Arbeit die PEEC-basierte Software GeckoEMC entwickelt wurde.

2.1 RLC Netzwerkgleichungen

Weiter unten wird die Methode der Partiellen Elemente abgeleitet, welche auf ein Netzwerk aus diskreten elektrischen Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten führt. Auch der später vorgestellte thermische Solver basiert auf einem RC-Netzwerk, wobei die Widerstände als thermische Widerstände und Kapazitäten als thermische Kapazitäten uminterpretiert werden. Eine Modellordnungsreduktion ermöglicht schliesslich eine Makro-Modellierung der ursprünglich sehr detaillier-



Abb. 2.1: Illustration der Inzidenzmatrix (2.2). Die Knoten sowie die Zweipole sind entsprechend der Matrixeinträge nummeriert.

ten Modelle, welche dann erneut in einem Schaltungssimulator wie z.B. GeckoCIRCUITS eingesetzt werden können.

Um einen einheitlichen Formalismus zu gewährleisten, werden hier die Netzwerkgleichungen zum Lösen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen besprochen. Ähnliche Darstellungen sind beispielsweise in [14, 15, 16, 17] zu finden.

Inzidenzmatrix und Kirchhoff'sche Gesetze

Mathematisch stellt ein elektrisches Netzwerk einen gerichteten Graphen dar, welcher mittels einer Inzidenzmatrix \mathcal{A} beschrieben werden kann. Dabei gilt folgende Konvention: nummeriert man potentialbehaftete Knoten eines Netzwerkes von 1 bis *n* durch, so enthält die Inzidenzmatrix die Werte 1 oder -1 für jeden Zweipol, welcher die Knoten über eine Kante mit einem anderen Knoten verbindet. Die Vorzeichenwahl des Eintrages ist frei wählbar, sollte aber für alle Bauteile konsistent berücksichtigt werden. So können die Matrixeinträge durch eine Stromrichtungsdefinition für jeden Zweipol folgendermassen definiert werden:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{km} = \begin{cases} 1, \text{ falls der } k\text{-te Zweipol den Knoten } m \text{ verlässt} \\ -1, \text{ falls der } k\text{-te Zweipol im Knoten } m \text{ mündet} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$
(2.1)

Als Beispiel ist in Gleichung (2.2) die 3×4 Inzidenzmatrix für die in Abbildung 2.1 gezeigte Schaltung angegeben

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$
 (2.2)

Durch die Inzidenzmatrix können nun die Kirchhoff'schen Regeln für Ströme und Spannungen in einfacher Form ausgedrückt werden:

$$\mathcal{A}i + i_{\rm s} = 0 \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} = 0. \qquad (2.4)$$

Hier sind i und v die Lösungsvektoren, welche die Ströme und Spannungen der Schaltung beinhalten, i_s und v_s sind die Vektoren externer Strom- und Spannungsquellen. In Worten bedeutet Gleichung (2.3), dass sich Ströme in einem Knoten des Netzwerkgraphen zu Null addieren müssen (Knotenregel); ebenso summieren sich die Spannungen innerhalb eines geschlossenen Pfades nach Gleichung (2.4) zu Null (Maschenregel). Aus letzterem Zusammenhang erhält man die einfache Umrechnung von Knotenpotentialen v zu den Spannungsdifferenzen

$$\boldsymbol{v}_{\text{diff}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v},$$
 (2.5)

welche direkt an den Bauteilen anliegen. Gesteuerte Strom- und Spannungsquellen werden demnach nicht als zusätzlicher Zweipol im Netzwerk berücksichtigt, da die Werte der Quellen ohnehin als von extern gegeben angenommen werden. Zwei zusätzliche Bemerkungen sind hier zur Inzidenzmatrix angebracht:

1. Der Zeilenrang der Matrix \mathcal{A} , wie oben definiert, ist unvollständig. Dies sieht man sofort ein, da ein konstanter Vektor $\mathbf{i} = (1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ und beliebige Vielfache hiervon immer eine Lösung der Kirchhoff'schen Stromregel (2.3) darstellen; diese Vektoren befinden sich also im Nullraum der Matrix. Allgemein gilt rang $(\mathcal{A}) = n - 1$. Dies hat zur Folge, dass die weiter unten aufgestellten Netzwerkgleichungen singulär und damit zunächst nicht lösbar sind. Abhilfe kann die Definition eines beliebigen Potentials als Nullpotential (Masse) schaffen. Auf diese weise muss dieses Potential nicht mehr in den Gleichungen berücksichtigt werden. Alternativ kann mindestens eine Komponente im Netzwerk verwendet werden, welche nur einen Anschlusspunkt (einen einzelnen Eintrag einer Spalte in der Inzidenzmatrix) besitzt, sodass der zweite Bauteilknoten automatisch gegen einen virtuellen Nullpunkt definiert ist. In einem späteren Abschnitt wird die Potentialkoeffizientenmatrix für die PEEC-Methode definiert, welche zunächst für jedes Potential eine Kapazität gegen ∞ besitzt, und somit das Singularitätsproblem prinzipiell löst. Dennoch ist zu empfehlen, dass in jeder Schaltung mindestens eine zusätzliche explizit definierte Schaltungskomponente einen Massebezug herstellt. Dies ist deshalb sinnvoll, da die modellinternen Kapazitäten gegen ∞ sehr klein sind, und damit eine "beinahe" singuläre Matrix erzeugt wird, welche durch sehr grosse Konditionszahlen Stabilitätsprobleme bei der Simulation erzeugen kann.

2. Ordnungsreduzierte Modelle oder die beim thermischen Solver eingeführten Randbedingungen sind eventuell keine Zweipole mehr, sondern *n*-Pole. Auch hier lässt sich eine entsprechende Inzidenzmatrix definieren, welche die Gleichungen (2.3) und (2.4) sinnvoll festlegen. In diesem Fall muss ebenso gelten, dass für *n*-Tore ohne Verbindung zum Massepotential die Summe der entsprechenden Matrixspalte Null ergibt.

Das modifizierte Knotenpotentialverfahren für RLC Netzwerke

Im Zeitbereich gelten für die Schaltungskomponenten Widerstand R, Induktivität L und Kapazität C die einfachen Zusammenhänge

$$v_{\rm R} = R i_{\rm R}, v_{\rm L} = L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{\rm L} \text{ und } i_{\rm C} = C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_{\rm C} .$$
 (2.6)

In den PEEC-Netzwerkgleichungen werden nicht nur Eigeninduktivitäten L berücksichtigt, sondern auch Kopplungsinduktivitäten M und Kopplungskapazitäten. Dies wird am einfachsten durch eine Erweiterung der Grundgleichungen von (2.6) auf Matrixform erreicht, wobei die dabei entstehende Induktivitätsmatrix L und Kapazitätsmatrix Cin den noch folgenden Abschnitten 2.3.2 und 2.3.6 besprochen werden.

Für PEEC-Netzwerke liegen die Selbstinduktivitäten der Volumenzellen stets in Serie zum Zellwiderstand, deshalb ist die folgende Zusammenfassung der Grundgleichungen (2.6) geschickt:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{RL}} = \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{L} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \boldsymbol{i}_{\mathrm{RL}} \text{ und } \boldsymbol{i}_{\mathrm{C}} = \boldsymbol{C} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}.$$
 (2.7)

Die Matrix \boldsymbol{R} ist eine Diagonalmatrix mit den entsprechenden Widerstandswerten als Einträge. Die Diagonaleinträge der Induktivitätsma-

trix stellen die Eigeninduktivitäten der Volumenzellen dar, Nebendiagonalelemente entsprechen magnetischen Kopplungen zwischen den Zellen. Verwendet man die Bestimmungsgleichungen (2.7) zusammen mit den Kirchhoff'schen Regeln (2.3) und (2.4), so erhält man mit den Zustandsvektoren $\boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{v} \ \boldsymbol{i})^{\mathrm{T}}$ ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\boldsymbol{E}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{F}, \qquad (2.8)$$

bzw. ausführlicher

$$\underbrace{\begin{pmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L \end{pmatrix}}_{E} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathcal{A} \\ \mathcal{A}^{\mathrm{T}} & -R \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -i_{\mathrm{s}} \\ v_{\mathrm{s}} \end{pmatrix}}_{F} . \quad (2.9)$$

Gleichung (2.9) wird in der Literatur als modifiziertes Knotenpotentialverfahren (MNA – Modified Nodal Analysis) bezeichnet [18]. Man sieht durch blockweises Ausmultiplizieren der Matrixgleichung leicht ein, dass diese sowohl die Kirchhoff'schen Regeln, als auch die Bestimmungsgleichungen der Bauelemente R, L und C erfüllt sind. Hierbei ist zu beachten, dass in (2.9) im Hinblick auf die PEEC-Methode bereits die Serienschaltung der Induktivitäten und Widerstände nach (2.7) in der Inzidenzmatrix \mathcal{A} verwendet wurde, d.h. jedes RL-Paar stellt zusammen eine Spalte mit den zwei Einträgen -1,+1 in \mathcal{A} dar.

Neben dem MNA-Verfahren werden häufg noch das Knotenpotentialverfahren, die Maschenanalyse und das Sparse-Tableau-Verfahren [19] verwendet. Letzteres führt auf ein sehr grosses Gleichungssystem mit sehr dünn besetzten Systemmatrizen, worauf hier nicht weiter eingegangen wird. Das Knotenpotentialverfahren ist in Bezug auf die FDM-Methode für thermische Simulationen interessant, weshalb die relevanten Gleichungen im Folgenden aus dem MNA-Verfahren abgeleitet werden.

Das Knotenpotentialverfahren

Schreibt man die MNA-Gleichung (2.9) als zwei getrennte Gleichungssysteme

$$\boldsymbol{C}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}_{\mathrm{s}}$$
(2.10)

$$\boldsymbol{L}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{i}\,,\qquad(2.11)$$

dann können die Zustandsvariablen im Vektor i durch Umformen von Gleichung (2.11), anschliessender Linksmultiplikation mit $(\mathbf{R} + \mathbf{L} d/dt)^{-1}$ und Einsetzen in (2.10) eliminiert werden. Man beachte, dass der Vektor der gesteuerten Spannungsquellen $v_{\rm s}$ hier nicht übernommen wurde, d. h. $v_{\rm s} = 0$. Der Grund dafür ist, dass das reine Knotenpotentialverfahren die direkte Einbindung von gesteuerten Spannungsquellen nicht erlaubt.

Nach der Elimination des Stromvektors erhält man

$$\boldsymbol{C}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{i}_{\mathrm{s}}$$
(2.12)

und Auflösen nach der Spannung \boldsymbol{v} ergibt schliesslich das Knotenpotentialverfahren

$$\underbrace{\left(C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}\left(R + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}\mathcal{A}^{\mathrm{T}}\right)}_{\mathbf{Y}} \mathbf{v} = \mathbf{i}_{\mathrm{s}}.$$
 (2.13)

Dabei kann die Matrix Y als Admittanz verstanden werden, weshalb die Methode auch als Admittanz-Methode bezeichnet wird. Der Differentialoperator d/dt innerhalb der invertierten Matrix mag zunächst etwas ungewöhnlich erscheinen. In der Praxis wird (2.13) so nach den unbekannten Spannungen v gelöst, dass der Differentialoperator durch eine diskretisierte Näherung $dt \rightarrow \Delta t$ mittels einer Integrationsmethode ersetzt wird; die Matrixgleichung wird schliesslich mit einer LU-Faktorisierung gelöst. Dies wird im Abschnitt 2.1.2 detaillierter besprochen. Um aus Gleichung (2.13) eine vollwertige Lösung entsprechend dem Knotenpotentialverfahren zu erhalten, können nach der Lösung von (2.13) die Ströme mit

$$\boldsymbol{i} = \left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$$
 (2.14)

berechnet werden. Wie bereits erwähnt, ist für das reine Knotenpotentialverfahren (2.13) und (2.14) eine direkte Einbindung gesteuerter Spannungsquellen nicht möglich. Dies hat den Grund, dass im Gleichungssystem für eine Spannungsquelle der Stromwert als Lösungsvariable berechnet werden müsste. Genau dieser Freiheitsgrad wurde bei der Herleitung aus der MNA-Methode jedoch eliminiert. Die Matrix Y ist (im Zeitbereich) symmetrisch positiv definit (SPD), was eine vereinfachte Lösung der Matrixgleichung zulässt. Theoretisch wäre es möglich \boldsymbol{Y} jeweils um eine Zeile und eine Spalte zu erweitern, um gesteuerte Spannungsquellen zu berücksichtigen. Dadurch wird die SPD-Struktur der Matrix jedoch zerstört.

2.1.1 Lösungen im Frequenzbereich

Bisher wurden lediglich die NA- und MNA-Gleichungen gezeigt, es wurde aber noch keine Aussage über die Lösungsdomäne gemacht. Die Gleichungen können sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich gelöst werden. Zunächst wird die Frequenzbereichssimulation betrachtet. Hierfür muss in den Gleichungen jeweils der Differentialoperator d/dt mit der entsprechenden Fourier-Transformation j ω ersetzt werden. Mit dem MNA-Verfahren (2.9) erhält man damit das komplexe Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} j\omega C + Y & \mathcal{A} \\ -\mathcal{A}^{\mathrm{T}} & R + j\omega L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_{\mathrm{s}} \\ v_{\mathrm{s}} \end{pmatrix}.$$
 (2.15)

Als Knotenpotential-Lösung resultiert entsprechend

$$\boldsymbol{v} = \left(j\omega\boldsymbol{C} + \boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{R} + j\omega\boldsymbol{L}\right)^{-1}\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{i}_{\mathrm{s}}, \qquad (2.16)$$

wobei die Ströme dann mit

$$\boldsymbol{i} = (\boldsymbol{R} + j\omega \boldsymbol{L}) \boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}$$
 (2.17)

berechnet werden können.

Die obigen Zusammenhänge führen auf komplexe Gleichungssysteme, welche ähnlich wie reelle Gleichungssyteme gelöst werden können. Dafür kann das Gleichungssystem Mx = b auf ein reelles System

$$\begin{pmatrix} \Re(\boldsymbol{M}) & -\Im(\boldsymbol{M}) \\ \Im(\boldsymbol{M}) & \Re(\boldsymbol{M}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re(\boldsymbol{x}) \\ \Im(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(\boldsymbol{b}) \\ \Im(\boldsymbol{b}) \end{pmatrix}$$
(2.18)

der doppelten Grösse erweitert werden. Durch eine anschliessende LU-Faktorisierung des vergrösserten Systems erhält man schliesslich den Realteil $\Re(\mathbf{x})$ und den Imaginärteil $\Im(\mathbf{x})$ der Lösung.

Alternativ kann man sich bei der Faktoriserung M = LU einer komplexen Arithmetik bedienen. Letzteres führt auf Vorteile beim Speicherbedarf der Lösung. In dieser Arbeit wurde für sämtliche Matrixoperationen die Math-Kernel-Bibliothek (MKL) von Intel verwendet [20], welche wahlweise reelle oder komplexe Datentypen zulässt. Ausserdem ist die MKL auf Mehrprozessor-Systeme optimiert, sodass sich komplexe Matrizen M mit bis zu $n = 20\,000$ Variablen mit akzeptablem Rechenaufwand mittels direkter Faktorisierung lösen lassen. Sind die Matrizen dünn besetzt, können durch den Einsatz eines Sparse-Solvers Gleichungssysteme gelöst werden, die um Grössenordnungen umfangreicher sind.

2.1.2 Integrationsmethoden der Netzwerkgleichungen im Zeitbereich

Die Netzwerkgleichungen (2.9) stellen ein System von differential-algebraischen Gleichungen dar und erfordern für eine Lösung im Zeitbereich die Approximation des Differentialoperators. Hierfür sind in der Literatur zahlreiche Methoden zu finden [21, 17], welche unterschiedliche Eigenschaften bezüglich Genauigkeit, Stabilität, numerischer Dämpfung und Berechnungsaufwand besitzen. Die hier für den PEEC-Solver verwendeten Integrationsmethoden werden in diesem Abschnitt kurz besprochen. Eine gute Übersicht der verschiedenen Methoden und deren mathematischen Eigenschaften gibt [22].

In Kapitel 4 wird der Zusammenhang zwischen der RC-Netzwerkdarstellung und der Finite-Differenzen-Methode für thermische Simulationen aufgezeigt. Dort treten für die Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung im Zeitbereich verschiedene Differenzen-Verfahren auf, welche sich direkt auf die hier vorgestellten Integrationsmethoden zurückführen lassen, haben aber aufgrund der FDM-Herkunft andere Bezeichnungen.

In der Schaltungssimulation werden üblicherweise BDF-Näherungen (Backward-Difference-Formula) verwendet. Neben den BDF-Diskretisierungen existieren noch andere Klassen von Integrationstypen, wie z. B. Runge-Kutta-Verfahren (RK), insbesondere ist das RK4-Verfahren 4. Ordnung für viele Differentialgleichungs-Solver als Standard implementiert. Für eine Schaltungssimulation hat sich aber gezeigt, dass der erhöhte numerische Aufwand des RK-Schemas den möglichen Gewinn an Genauigkeit nicht rechtfertigt [22]. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Systemmatrizen wie bei PEEC Netzwerkmodellen sehr gross und dicht besetzt sind. RK-Verfahren werten neben den Lösungsvariablen in den regulären Zeitschritten $(t^k, t^{k+1} \text{ mit } \Delta t = t^{k+1} - t^k)^1$

¹Indizes für Zeitschritte werden in dieser Arbeit hochgestellt, da später der tiefge-


Abb. 2.2: Diskretisierung des Ableitungsoperators nach dem Backward-Euler-Verfahren (BE, blau), dem Trapezverfahren (TR, orange) und dem Forward-Euler-Verfahren (FE, grün).

auch Variablen in Zwischenschritten aus. Diese Auswertung der Zwischenschritte erfordert einen hohen numerischen Aufwand durch eine eventuell nötige erneute Faktorisierung der Systemmatrizen. Aus diesem Grund werden RK-Verfahren in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

Die drei bekanntesten Integrationsschemata sind das Forward-Euler Verfahren, Backward-Euler-Verfahren und das Trapezverfahren. Der jeweilige Unterschied dieser Methoden ist die Definition, zu welchem Zeitpunkt in der Folge t^k der Differentialoperator ausgewertet wird (siehe Abbildung 2.2). Das Trapezverfahren ist der Mittelwert aus Forward-Euler und Backward-Euler, und besitzt eine erhöhte Genauigkeit der Grössenordnung $\mathcal{O}(\Delta t^2)$, da sich die Fehlerterme erster Ordnung weg-

	a_0	a_1	b_{-1}	b_0	Differentialgleichung
Forward-Euler	1	0	0	1	$\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\Delta t} (x^{k+1} - x^k)$
Backward-Euler	1	0	1	0	$\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\Delta t} (x^k - x^{k-1})$
Trapezverfahren	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\Delta t} (x^{k+1} - x^{k-1})$
Gear-Shichman	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{\mathrm{d}x^{k}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{3}{2}x^{k} - 2x^{k-1} + \frac{1}{2}x^{k-2}\right)$

stellte Index für die Raumdimension reserviert ist.

Tabelle 2.1: Koeffizienten und die sich daraus ergebenden Differentialgleichungen für verschiedene Zeitbereichs-Integrationsschemata.



Abb. 2.3: Numerische Dämpfung der Integrationsverfahren. Der Schwingkreis a) besitzt kein Dissipationselement, dennoch besitzen die simulierten Zeitverläufe b) eine starke (Backward-Euler) bzw. eine schwache (Gear-Shichman) Dämpfung. Das Trapezverfahren ist grenzstabil, d. h. es besitzt keinerlei Dämpfung. Schrittweite $\Delta t = 2.5 \,\mu s$.

heben – im Gegensatz zu den Fehlertermen erster Ordnung der Euler-Verfahren.

Ein allgemeines Schema für sämtliche BDF-Verfahren erster Ordnung $(\rho = 0)$ oder auch höherer Ordnung $(\rho > 0)$ kann durch die Koeffizienten a_r und b_r in

$$x^{k+1} = \sum_{r=0}^{\rho} a_r x^{k-r} + \Delta t \sum_{r=-1}^{\rho} b_r \frac{\mathrm{d}x^{k-r}}{\mathrm{d}t}$$
(2.19)

dargestellt werden [23]. Die entsprechenden Koeffizienten für die hier verwendeten Integrationsverfahren sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Man beachte, dass das Trapezverfahren und das Gear-Shichman-Verfahren (BDF2) eine Historie von jeweils zwei Zeitschritten besitzen, und damit Verfahren zweiter Ordnung sind.

Die detaillierten mathematischen Eigenschaften der Integrationsmethoden können und aus Lehrbüchern, z.B. [22], entnommen werden. Hier seien lediglich die Hauptmerkmale zusammengefasst:

- Forward-Euler (Explizites Verfahren) ist für grössere Schrittweiten instabil, und wird deshalb nur selten verwendet.
- Backward-Euler ist für alle Zeitschritte stabil, besitzt aber eine sehr grosse numerische Dämpfung.

- Das Trapezverfahren ist grenzstabil, d. h. das Verfahren besitzt keinerlei numerische Dämpfung, eventuelle numerische Schwingungen werden deshalb nicht gedämpft.
- Das Gear-Shichman Verfahren stellt einen Kompromiss zwischen dem Trapezverfahren und Backward-Euler dar, es besitzt eine geringe numerische Dämpfung.

Abbildung 2.3 zeigt die Dämpfungseigenschaften der Integrationsschemata anhand eines ungedämpften Schwingkreises. Die Simulationen wurden im Schaltungssimulator GeckoCIRCUITS durchgeführt, in welchem dieselben Integrationsmethoden implementiert wurden wie im PEEC-Solver GeckoEMC.

2.2 Herleitung der PEEC-Methode

Die PEEC-Methode wird in der Literatur öfters zu Unrecht als approximatives Lösungsverfahren für die elektromagnetische Simulation bezeichnet. Bezieht man sich auf die Vollwellenlösung, gibt das Verfahren eine vollständige Lösung der Maxwellgleichungen wieder. Die einzige Näherung ist hierbei die Diskretisierung der Leitergeometrien in einzelne Zellen. Um zu illustrieren, dass PEEC eine vollwertige Lösungsmethode der Maxwellgleichungen ist, werden im Folgenden schrittweise die PEEC-Grundgleichungen aus den Maxwellgleichungen abgeleitet. Ähnliche Darstellungen sind beispielsweise in [5, 24, 25, 26] zu finden.

Die Maxwellgleichungen in Differentialform sind vier gekoppelte partielle Differentialgleichungen

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{E}$$
(2.20)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{B} \tag{2.21}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.22}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad (2.23)$$

und bilden die Grundlage für die meisten in der Elektrodynamik auftretenden Prozesse. Wir betrachten hier nur die Gleichungen für das Vakuum oder elektrische Leiter, d. h. die relative Permeabilität und relative Dielektrizitätszahl sei im gesamten Raumgebiet $\mu_{\rm r} = \epsilon_{\rm r} = 1$.

Nun kann man (2.21) durch Einführung des magnetischen Vektorpotentials A mit $\nabla \times A = B$ und Vertauschung der Reihenfolge der Ableitungen folgendermassen umformen:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0.$$
 (2.24)

Da hier die Rotation im rechten Teil in Gleichung (2.24) verschwindet, kann man die Klammer durch den Gradienten eines skalaren Potentials mit

$$\nabla \phi = -\boldsymbol{E} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{2.25}$$

beschreiben, bzw. bei der Existenz eines externen elektrischen Feldes $\pmb{E}^{\rm e}$ wird über das Superpositionsprinzip

$$\nabla \phi = -\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$
(2.26)

das Feld linear überlagert. Das magnetische Vektor
potential \boldsymbol{A} ist hier nicht eindeutig bestimmt. Deshalb wird typischerweise die Lorentz-Eichung

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{2.27}$$

verwendet, wobei die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ im Nenner ersetzt werden könnte. Damit kann man die Maxwellgleichungen (2.22) und (2.20) als Paar zweier entkoppelter Differentialgleichungen zweiter Ordnung umformen,

$$\Delta \phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{2.28}$$

$$\Delta \boldsymbol{A} + \mu_0 \boldsymbol{j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}, \qquad (2.29)$$

welche jeweils eine Wellengleichung in den Potentialen A und ϕ darstellen. Der einzige Zusammenhang zwischen (2.28) und (2.29) besteht über die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad (2.30)$$

welche die Ladungserhaltung im System sicherstellt. Die Funktion

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t) = \frac{\delta(t - t' - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
(2.31)

ist eine Lösung der Wellengleichungen (2.28) und (2.29), falls der Inhomogenitätsterm die Form einer vierdimensionalen Dirac'sche δ -Distribution annimmt, und ist damit eine Green'sche Funktion² der Wellengleichung. Die verwendete δ -Distribution ist vierdimensional, da neben den drei Raumkoordinaten nur beim Zeitpunkt t = 0 eine Ladung bzw. Stromdichte vorhanden ist, $\delta = \delta(\mathbf{r}', t')$. Dadurch wird in (2.31) die Retardierung des Signals mit der Lichtgeschwindigkeit einbezogen. Bei einer statischen Ladungs- bzw. Stromdichteverteilung würde die Green'sche Funktion des Laplaceoperators,

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \qquad (2.32)$$

zutreffen. Mithilfe der Green'schen Funktion können die Potentiale damit durch folgende Integrale ausgedrückt werden

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0 \int G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t)\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) \,\mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' \,\mathrm{d}t' \qquad (2.33)$$

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t)\rho(\mathbf{r},t) \,\mathrm{d}^3\mathbf{r}' \,\mathrm{d}t' \,. \tag{2.34}$$

Verwendet man hier die quasistatische Näherung (2.32), so entfällt die Integration über die Zeit. Schliesslich erhält man mit Gleichung (2.26) das elektrische Feld im Aufpunkt r

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}^{e}(\boldsymbol{r},t) - \mu_{0} \frac{\partial}{\partial t} \int G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t) \, j(\boldsymbol{r}',t') \, \mathrm{d}^{3}\boldsymbol{r}' \, \mathrm{d}t' \\ - \frac{1}{\epsilon} \nabla \int G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t) \, \rho(\boldsymbol{r}',t') \, \mathrm{d}^{r}\boldsymbol{r}' \, \mathrm{d}t'$$
(2.35)

Hier tragen die beiden Integrale effektiv nur dort zum elektrischen Feld bei, wo eine Ladungs- oder Stromdichte $\neq 0$ vorhanden ist, d. h. auf Leiteroberflächen oder im Leitervolumen. Damit folgt sofort, dass die Integrationen auch auf diesen Bereich beschränkt bleiben können.

Innerhalb eines Leiters gilt das Ohmsche Gesetz

$$\rho \, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}.\tag{2.36}$$

²Gegeben sei eine beliebige Differentialgleichung Ly = f(x) mit einem Differentialoperator L. Jede Funktion G, welche die Differentialgleichung für $LG(x) = \delta(x)$ löst, wird allgemein als Green'sche Funktion bezeichnet.



Abb. 2.4: Typische Basisfunktionen in einer Raumdimension, wie sie für FEM, FDM oder PEEC Modelle verwendet werden können.

Setzt man dies in (2.35) ein, so erhält man schliesslich die Integralgleichung des elektrischen Feldes, welche in der englischsprachigen Literatur üblicherweise als "Electric Field Integral Equation" (EFIE) bezeichnet wird,

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},t) = \rho \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) + \mu \frac{\partial}{\partial t} \int G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t) \, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t') \, \mathrm{d}^{3}\boldsymbol{r}' \, \mathrm{d}t' + \frac{1}{\epsilon} \nabla \int G(\boldsymbol{r},t,\boldsymbol{r}',t) \, \rho(\boldsymbol{r}',t') \, \mathrm{d}^{3}\boldsymbol{r}' \, \mathrm{d}t'.$$
(2.37)

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (2.30) beschreibt die EFIE (2.37) dieselben Lösungen wie die Maxwellgleichungen. Man beachte, dass – abgesehen von der Voraussetzung homogener Materialien mit $\mu_{\rm r} = \epsilon_{\rm r} = 1$ – bis zur Herleitung der EFIE keine weiteren Näherungen durchgeführt wurden. Die externen Felder $E^{\rm e}(\mathbf{r}, t)$ werden im Folgenden für eine vereinfachte Darstellung vernachlässigt. Um (2.30) zusammen mit der Kontinuitätsgleichung zu lösen, bedarf es einer Diskretisierung, d. h. eines Übergangs vom kontinuierlichen Funktionenraum zu diskreten Basisfunktionen.

Typische Basisfunktionen, wie sie für Simulationsmodelle verwendet werden, sind in Abbildung 2.4 gezeigt. Eine zwei- oder dreidimensionale Erweiterung erfolgt entsprechend. Für FEM-Modelle kommen überlappende Dreiecke oder durch Polynome definierte Basisfunktionen zum Einsatz. Im Gegensatz hierzu ist die Rechteck-Puls Basisfunktion für die PEEC-Methode die einfachste Wahl, d. h. die Strom- und Ladungsverteilungen werden über eine Volumen- und Oberflächenzelle als konstant angenommen. Um PEEC-Modelle in Bezug auf den Skineffekt zu



Abb. 2.5: Diskretisierung der PEEC Zellen. a) zeigt die Diskretisierung der Volumenzellen und die für einen ausgewählten Knoten möglichen Stromrichtungen. Man beachte, dass sich die Volumenzellen in x, y und z-Richtung räumlich überschneiden. b) zeigt die Diskretisierung der Oberflächenzellen, welche eine halbe Zellenlänge Versatz bezüglich den Volumenzellen besitzen.

verbessern, wären andere Basisfunktionen denkbar, welche die Tendenz berücksichtigen, dass bei höheren Frequenzen die Ströme an der Oberfläche fliessen. Unter Verwendung dieser Basisfunktionen können die Strom- und Ladungsverteilung zu

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t') \approx \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{V}}} \boldsymbol{j}_{k}(t') f_{k}(\boldsymbol{r}')$$

$$\sigma(\boldsymbol{r}',t') \approx \sum_{l=1}^{N_{\mathrm{S}}} \sigma_{l}(t') f_{l}(\boldsymbol{r}')$$
(2.38)

angenähert werden, f_k und f_l sind hier die jeweiligen Pulsbasisfunktionen der N_V Volumenzellen und N_S Oberflächenzellen. Da eine Ladungsverteilung ausschliesslich an den Leiteroberflächen auftritt, wurde hier und im Folgenden die Raumladungsdichte ρ durch die Oberflächenladungsdichte σ ersetzt.

Abbildung 2.5 zeigt die für PEEC üblichen Diskretisierungen der Volumen- und Oberflächenzellen. An der Oberfläche und den Kanten der Leiterstruktur werden halbe bzw. geviertelte Volumenzellen eingesetzt, was zu einer verbesserten Modellierung des Skineffektes führt. Insgesamt ergibt sich selbst bei wenigen Zellunterteilungen wie in Abbildung 2.5 eine recht komplizierte Struktur des dreidimensionalen Gitters – die gezeigte Abbildung besitzt insgesamt 27 Potentialknoten, 26 Oberflächenzellen und 54 Volumenzellen.

Durch die stückweise konstanten Basisfunktionen (Volumen- bzw. Oberflächenzellen) aus (2.38) kann die EFIE (2.37) folgendermassen angenähert werden

$$0 = \rho \sum_{k=1}^{N_{\rm V}} \boldsymbol{j}_k(t) f_k(\boldsymbol{r}) + \mu \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{N_{\rm V}} \boldsymbol{j}_k(t - \tau_k) \int_{V_k} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \, \mathrm{d}V_k + \frac{1}{\epsilon} \nabla \sum_{l=1}^{N_{\rm S}} \sigma_l(t - \tau_l) \int_{S_l} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \, \mathrm{d}S_l.$$
(2.39)

Die Integrationsgrenzen beziehen sich jetzt nur noch auf die jeweiligen Zellen, da die Basisfunktionen ausserhalb Null sind. Man beachte, dass in (2.39) zwei Näherungen durchgeführt wurden: zum Einen wurden die kontinuierlichen Strom- und Ladungsverteilungen vor die Integrale gezogen, da diese in der Pulsbasisfunktion konstant sind. Ausserdem wurde die Retardation der Felder durch eine zeitverzögerte Wirkung der Strom- und Ladungsverteilung eingeführt, wobei hier als Näherung der zeitliche Abstand des Aufpunktes r zum Zellmittelpunkt verwendet werden kann

$$\tau_k = \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{k,\text{center}}|}{c} \,. \tag{2.40}$$

Der letzte Schritt von (2.39) zu einem Differentialgleichungssystem wird über das Galerkin-Verfahren erreicht. Die Gewichtungsfunktion w_k des Galerkin-Verfahrens ist identisch mit der zuvor gewählten Volumen-Basisfunktion f_k . Nach Galerkin ist das Integral über die mit der Gewichtsfunktion multiplizierten Integralgleichung (2.39) (das Residuum) gleich Null zu setzen. Wird dies für alle Test- und Gewichtsfunktionen durchgeführt, erhält man das zu lösende Gleichungssystem. Integriert man beispielsweise (2.39) über die Testfunktion w_m im Volumen V_m , so resultiert eine einzelne Zeile des gesamten Gleichungssystems

$$0 = \boldsymbol{j}_{k}(t)\rho V_{\mathrm{m}} + \mu \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{V}}} \boldsymbol{j}_{k}(t-\tau_{k}) \iint_{V_{m}V_{k}} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \,\mathrm{d}V_{k} \,\mathrm{d}V_{m} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \sum_{l=1}^{N_{\mathrm{S}}} \sigma_{l}(t-\tau_{l}) \iint_{V_{k}S_{l}} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \,\mathrm{d}S_{l} \,\mathrm{d}V_{k}.$$

$$(2.41)$$

Die einzelnen Terme in (2.41) lassen sich so interpretieren, dass man eine diskretisierte Schaltungsgleichung $0 = -\boldsymbol{u}_{e} + \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{L} \cdot d\boldsymbol{i}/dt + \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{q}$ erhält. Dabei stellt $R_m = \rho V_m$ in (2.41) den elektrischen Widerstand einer Volumenzelle dar,

$$Lp_{km} = \mu \iint_{V_k V_m} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \, \mathrm{d}V_k \, \mathrm{d}V_m$$
(2.42)

ist die Kopplungsinduktivität der Volumenzellen k und m, bzw. die Eigeninduktivität, falls m = k.

Der letzte Term in (2.41) kann als inverser Kapazitätsterm aufgefasst werden. Hier besteht noch die formale Schwierigkeit, sich dass die gewählten Oberflächenzellen S_l aufgrund des Versatzes um eine halbe Zelllänge nur zur Hälfte im Volumen V_k befinden. Durch eine weitere Näherung, dass sich zwei direkt benachbarte Oberflächen-Halbzellen auf gleichem Potential befinden [5], gewinnt man schliesslich den Ausdruck

$$P_{km} = \frac{1}{\epsilon} \iint_{S_k S_m} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) \,\mathrm{d}S_k \,\mathrm{d}S_m \tag{2.43}$$

für die sogenannten Potentialkoeffizienten. $P = C^{-1}$ ist die Inverse einer Kapazitätsmatrix, was in Abschnitt 2.3.6 ausführlicher diskutiert wird.

PEEC als Lösungsmethode der Maxwellgleichungen ist eine sehr anschauliche und flexible Methode. Je nach Bedarf können verschiedene Modellteile berücksichtigt oder vernachlässigt werden. Bei grossen Wellenlängen im Vergleich zur Modellabmessung kann die Retardation ausser Acht gelassen werden. Falls nur induktive Effekte eine Rolle im Modell spielen, kann dies durch eine Vernachlässigung des kapazitiven Terms (2.43) geschehen. Das Netzwerkmodell einer sehr einfachen Leiterstruktur ist in Abbildung 2.6 gezeigt.



Abb. 2.6: Darstellung eines einfachen PEEC-Modells. In a) sind drei Potentialknoten sind über zwei Volumenzellen miteinander verbunden. Das dazugehörige PEEC Netzwerk ist in b) gezeigt. Die magnetische Kopplung der Zellen über Kopplungsinduktivitäten wird durch stromgesteuerte Spannungsquelle nachgebildet, Kopplungskapazitäten entsprechend durch spannungsgesteuerte Stromquellen. Alternativ findet man in der Literatur auch die Struktur aus c), die gesteuerten Stromquellen in spannungsgesteuerte Spannungsquellen überführt; zusätzlich sind in c) die Zellwiderstand eingezeichnet.

2.3 Berechnung der Matrixeinträge der partiellen Elemente

Wie vorher abgeleitet, müssen die Matrixeinträge für die zu lösenden Matrix-Gleichungen anhand folgender Eigenschaften berechnet werden:

- Zell-Geometrie, Abstand und Anordnung der Zellen,
- physikalische Eigenschaften: Elektrische Leitfähigkeit (betrifft die Widerstands-Matrix \boldsymbol{R} und teilweise auch die Matrix \boldsymbol{L} der partiellen Induktivitäten),
- Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$,
- Dielektrizitäts- und Permeabilitätskonstanten.

Die Frequenzabhängigkeit der Matrixeinträge hat tatsächlich zwei Ursachen: Zum Einen ist über die Retardierung (Zeitverzögerung) der magnetischen und elektrischen Felder eine Phasenverzögerung nötig, welche in einer Frequenzbereichssimulation einen Faktor e^{-jkr} in den Matrizen \boldsymbol{L} und \boldsymbol{P} erzeugt. In Zeitbereichssimulationen hingegen kann die Retardierung durch eine verzögerte Berücksichtigung der Ströme und Spannungen in den Gleichungen eingeführt werden [27].

Da für die Anwendungen in der Leistungselektronik die Wellenlänge im Vergleich zu den typischen Modellabmessungen sehr gross ist kann die Retardierung in guter Näherung vernachlässigt werden, d. h. $e^{-jkr} \approx 1$ für $kr \ll 1$.

Die zweite Ursache für eine Frequenzabhängigkeit der Matrixeinträge besteht in einer genaueren Modellierung einzelner PEEC Zellen. So kann, bei gegebener Frequenz, der Skineffekt für einzelne Zellen mit berücksichtigt werden, ohne dass eine weitere Unterteilung der Zelle nötig ist. Mit diesem Ansatz werden die Formeln für den Widerstand der PEEC-Zellen sowie der partiellen Induktivitäten anhand analytischer Gleichungen leicht modifiziert.

2.3.1 Elektrischer Widerstand der stromführenden PEEC Zellen

Der elektrische Widerstand einer stromführenden PEEC-Zelle entspricht im Gegensatz zur partiellen Induktivität der herkömmlichen Definition, wie sie in der Physik üblich ist.

Konstante Stromdichte

Die Volumenzellen eines PEEC-Modells führen genau dann eine konstante Stromdichte innerhalb der Zellen, falls diese aus Quadern bestehen. Dies bedeutet, dass eine orthogonale Gittergeometrie vorliegt. In diesem Fall und für die in Abschnitt 2.4 eingeführten zylindrischen Zellen kann deshalb der Zellwiderstand einfach zu

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{l}{\sigma A} \tag{2.44}$$

berechnet werden, wobe
iAdie Leiterquerschnittsfläche und ldie Leiter
 oder Zelllänge sind. Der spezifische Widerstand ρ bzw.
die elektrische Leitfähigkeit σ können aus einer Material
datenbank verwendet, oder vom Benutzer einzeln für jede Zelle spezifiziert werden.

Verallgemeinerung: Nichtorthogonale Zellen variabler Stromdichte

Im Falle schiefwinkliger Volumenzellen ändert sich die Stromdichte innerhalb des Zellvolumens. Die Verallgemeinerung von orthogonalen Zellen zu einer nichtorthogonalen Geometrie wurde in [28] formuliert. Um dafür die Matrixeinträge für die PEEC-Systemmatrizen herzuleiten, wurde in [28] für jede Zelle ein lokales Koordinatensystem eingeführt. Das globale Koordinatensystem verwendet die gewöhnlichen kartesischen Lagekoordinaten x, y, z der Modellgeometrie, sodass jeder Punkt im Raum durch $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ dargestellt werden kann.

Hingegen erlaubt das neu eingeführte lokale Koordinatensystem in a, b, c die eindeutige Angabe eines Punktes innerhalb der Volumenzelle durch ein Zahlentripel im Intervall [-1, +1]. Die Umrechnung vom lokalen zum globalen Koordinatensystem wird mit der Gleichung

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{7} N_k(a, b, c) x_k \tag{2.45}$$

durchgeführt, mit $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$. Die Vorfaktoren $N_k(a, b, c)$ werden über

$$N_{0} = 1/8(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$N_{1} = 1/8(1-a)(1-b)(1+c)$$

$$N_{2} = 1/8(1-a)(1+b)(1-c)$$

$$N_{3} = 1/8(1-a)(1+b)(1+c)$$

$$N_{4} = 1/8(1+a)(1-b)(1-c)$$

$$N_{5} = 1/8(1+a)(1-b)(1+c)$$

$$N_{6} = 1/8(1+a)(1+b)(1-c)$$

$$N_{7} = 1/8(1+a)(1+b)(1+c)$$
(2.46)

berechnet. Die Umkehrung von (2.45) ist nicht ohne weiteres möglich, da bei der Transformation die absolute Lageinformation der Zellposition im Raum verloren geht. Setzt man für die Koordinaten a, b, c in (2.45)die Permutationen von ± 1 ein, erhält man gerade die Eckpunkte der schiefwinkligen Zelle [28].

Hier soll nun der Zellwiderstand ohne Beschränkung der Allgemeinheit in Richtung der lokalen Variablen a formal beschrieben werden. Die Stromdichte innerhalb der Zelle in lokalen Koordinaten beträgt mit dem Gesamtzellstrom I_a

$$J_a(a,b,c) = \frac{h_a \cdot I_a}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial b} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial c}\right)\right|} \text{ mit } h_a = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a}\right|$$
(2.47)

Damit kann der Zellwiderstand im lokalen Koordinatensystem mit dem Integral

$$R_a = \rho \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} J_a h_a \, \mathrm{d}a \, \mathrm{d}b \, \mathrm{d}c \tag{2.48}$$

berechnet werden. Für eine detailliertere mathematische Herleitung von (2.48) sei auf [28] verwiesen. Das Integral mag zunächst sehr kompliziert wirken, die Stromdichte innerhalb der Zelle kann aber abhängig von den drei Koordinaten a, b, c relativ einfach berechnet werden. Eine numerische Integration von (2.48) bedarf zwar eines gewissen Aufwandes, da aber ausschliesslich Diagonalelemente der Widerstandsmatrix \boldsymbol{R} berechnet werden müssen, und somit die Anzahl der zu berechnenden Elemente nur linear mit der Modellgrösse wächst, ist der numerische Aufwand für die Widerstandsberechnung insgesamt vernachlässigbar klein.

Zusätzlich vereinfacht wird die Berechnung dadurch, dass (2.48) keine Singularität enthält, wie es für Induktivitäten der Fall ist.

Einfluss des Skineffekts auf den elektrischen Widerstand

Der Skin- und Proximityeffekt führt bei höheren Frequenzen zur einer Vergrösserung des elektrischen Widerstands. Wechselströme erzeugen innerhalb eines Leiters eine Stromdichteverteilung, welche exponentiell mit dem Abstand d nach

$$J = J_{\rm S} \exp\left(\frac{-d}{\delta}\right) \tag{2.49}$$

von der Leiteroberfläche weg abnimmt. Hier ist $J_{\rm S}$ die Randstromdichte und δ die Skintiefe, welche über

$$\delta \approx \sqrt{\frac{2\rho}{2\pi f \mu_0 \mu_{\rm r}}} \tag{2.50}$$

von der Frequenz, dem spezifischen Widerstand des Materials und der relativen Permeabilitätszahl μ_r abhängig ist. Für nicht-ferromagnetische Materialien (Aluminium, Kupfer, ...) kann vereinfachend $\mu_r = 1$ angenommen werden. Eine schnelle Abschätzung, ob der Skineffekt einen Einfluss auf den Zellenwiderstand hat, erhält man durch den Vergleich des Leiterdurchmessers mit der Skintiefe.

Grundsätzlich werden sowohl der Skineffekt als auch der Proximityeffekt über die PEEC-Simulation korrekt abgebildet. Jedoch muss man dabei beachten, dass die Zellgrösse der Volumenzellen kleiner sein muss als die Skintiefe, ansonsten können diese Hochfrequenzeffekte nicht korrekt berechnet werden.

Für Sonderfälle kann der Skineffekt durch eine verbesserte Modellierung der Stromverteilung auch mit einbezogen werden. Da der Skineffekt durch den hochfrequenten Einfluss des Magnetfeldes innerhalb eines Leiters auf die interne Stromverteilung zustande kommt, kann z. B. eine frequenzabhängige Widerstandsmatrix \boldsymbol{R} berechnet werden.

Als hochfrequente Näherung kann dabei angenommen werden, dass der Oberflächenstrom in einer Schicht der Dicke δ fliesst. Für einen Rundleiter, wie er für PEEC-Modelle in Abschnitt 2.4 eingeführt wird, bedeutet dies für den frequenzabhängigen Widerstand

$$R_{\rm cyl}(f) \approx \frac{l\rho}{2\pi r\delta} = \frac{l\rho}{2r} \sqrt{\frac{f\rho\mu_0}{\pi}},$$
 (2.51)

d. h. der Widerstand nimmt näherungsweise mit $R \propto \sqrt{f}$ zu. Einen ähnlichen Zusammenhang kann man für beliebige Leitergeometrien finden. Die Änderung der partiellen Eigeninduktivität aufgrund des Skineffekts ist wesentlich schwächer als die Widerstandsabhängigkeit; mit zunehmender Frequenz nimmt die Induktivität ab und strebt gegen einen konstanten Wert (siehe Abschnitt 2.4 für Rundleiter).

Die Widerstandsabhängigkeit (2.51) kann für die PEEC-Simulation verwendet werden, um den Widerstand je nach Frequenz individuell zu berechnen. Dabei sollten aber folgende Punkte beachtet werden:

- Der Proximityeffekt, welcher den elektrischen Widerstand einer Zelle unter Umständen wesentlich stärker erhöhen kann als der Skineffekt, ist dabei nicht berücksichtigt.
- Eine einfache Modellordnungsreduktion, welche für die Einbindung des PEEC-Modells in einen Schaltungssimulator verwendet wird, kann nur für den Widerstand bei einer bestimmten Frequenz durchgeführt werden.

Für sehr hohe Frequenzen ist eine komplett oberflächenbasierte Beschreibung des PEEC-Modells vorteilhaft, da die Stromleitung aufgrund des Skineffekts ohnehin nur auf der Oberfläche stattfindet. Dadurch reduziert sich die Anzahl der Systemvariablen und damit die Modellgrösse wesentlich. Die oberflächenbasierte (S)-PEEC-Formulierung ist in [29] beschrieben. Da in dieser Arbeit nur niedrige bis mittlere Frequenzen betrachtet werden, wird im Folgenden ausschliesslich die volumenbasierte Beschreibung verwendet.

2.3.2 Partielle Induktivitäten

Die Notation und Herleitung der partiellen Induktivitäten in diesem Abschnitt ist im Wesentlichen an [6] und [28] angelehnt. Da das Verständnis der partiellen Induktivitäten Grundlage für die allgemeine dreidimensionale Berechnungsmethode der Induktivitätsmatrix ist, werden die wesentlichen Gleichungen hier kurz zusammengefasst.

Die Induktivität im herkömmlichen Sinne ist über den magnetischen Fluss bzw. den Verkettungsfluss definiert, welcher durch den Strom einer Leiterschleife k verursacht wird und durch die von der Leiterschleife m aufgespannte Fläche strömt



Abb. 2.7: Veranschaulichung der Kopplungsinduktivität zweier Stromschleifen. Die Kopplungsinduktivität L_{km} wird durch magnetische Feldlinien verursacht, welche beide Stromschleifen durchdringen.

$$L_{km} = \frac{N \cdot \phi_{km}}{I_j} = \frac{\Psi_{km}}{I_m} , \qquad (2.52)$$

siehe hierzu auch Abbildung 2.7. Im Weiteren wird nicht mehr zwischen magnetischem Fluss und Flussverkettung unterschieden, da nur einfache Leiterschleifen, d. h. N = 1 betrachtet werden. Da Feldlinien, welche beide Leiterschleifen durchdringen, für die Kopplungsinduktivität verantwortlich sind, ergibt sich aus Symmetriegründen $L_{km} = L_{mk}$. Betrachtet man den entarteten Fall, dass beide Leiterschleifen identisch sind, so erhält man konsistent die Selbstinduktivität $L_{kk} = L_k$ einer einzelnen Leiterschleife.

Der magnetische Fluss berechnet sich mittels des magnetischen Vektorpotentials A_{km} zu

$$\phi_{km} = \frac{1}{a_k} \oint_{ka_k} \mathbf{A}_{km} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_k \,\mathrm{d}a_k \,. \tag{2.53}$$

Das magnetische Vektorpotential ist definiert über $B = \nabla \times A$, bzw. in Integralform unter Anwendung des Biot-Savart'schen Gesetzes

$$\boldsymbol{A}_{km} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_m}{a_m} \oint_{m a_m} \int_{m a_m} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_m \,\mathrm{d}\boldsymbol{a}_m}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_m|} \,. \tag{2.54}$$

Setzt man (2.54) in (2.53) ein, so erhält man schliesslich die Induktivität

des geschlossenen Wegs

$$L_{km} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{ka_kma_m} \int \frac{d\boldsymbol{l}_k \cdot d\boldsymbol{l}_m}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_m|} \,. \tag{2.55}$$

Für ein elektromagnetisches Simulationstool stellt diese Definition der Induktivität zunächst ein grundsätzliches Problem dar, denn wie die geschlossenen Ringintegrale in (2.55) andeuten, ist die Induktivität nur auf einem vollständig geschlossenen Weg definiert. In der praktischen Anwendung von Simulationsprogrammen ist der geschlossene Strompfad erst nach der Vollendung der Simulation bekannt, ausserdem sind eventuell auch mehrere parallele Strompfade möglich.

Um diese Probleme zu überwinden, wurde 1972 von Albert Ruehli [6] eine Erweiterung des Begriffs der Induktivität zur partiellen Induktivität vorgeschlagen, welcher konsistent mit der herkömmlichen Definition und den Maxwellgleichungen ist. Eine partielle Induktivität ist für einzelne Leitersegmente definiert, wobei sich der Rückstrompfad im Unendlichen befindet, sodass in Gleichung (2.55) die Integrale durch Summen ersetzt werden können

$$L_{km} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{a_k a_m} \int_{a_k} \int_{a_m} \int_{b_k} \int_{b_m}^{c_k} \int_{b_m}^{c_m} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_m}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_m|} \,\mathrm{d}\boldsymbol{a}_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{a}_m \,. \tag{2.56}$$

Hierbei wurde angenommen, dass sich die Pfade i und j je aus K und M Einzelsegmenten zusammensetzen, wobei b_k, c_k, b_m und c_m die jeweiligen Start- und Endpunkte der Segmente sind; siehe hierzu auch Abbildung 2.8.

Anschaulich trägt für die partielle Kopplungsinduktivität jeweils die vom Fluss durchströmte und unbegrenzte Fläche bei, welche durch das jeweils andere Leitersegment begrenzt wird. Man kann mathematisch zeigen [6], dass die Werte der Kopplungsinduktivität für ein Paar von Leitersegmenten symmetrisch sind, d. h. $L_{km} = L_{mk}$. Damit erhält man schliesslich als Definition für die partielle Induktivität den einzelnen Summanden aus (2.56),

$$Lp_{km} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{a_k a_m} \int_{a_k} \int_{a_m} \int_{b_k} \int_{b_m}^{c_k} \int_{b_m}^{c_m} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_m}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_m|} \,\mathrm{d}a_k \,\mathrm{d}a_m \,. \tag{2.57}$$



Abb. 2.8: Partielle Kopplungsinduktivität zweier Leiterschleifen. Die Abbildungen a) und b) zeigen jeweils dieselben Leitersegmente, sowie die jeweils vom Fluss durchströmte Fläche, welche zur Kopplungsinduktivität beiträgt.

Nimmt man vereinfachend an, dass die Ströme sich nur auf einem orthogonalen Gitter mit konstanter Stromdichte bewegen, so erhält man für parallele Ströme die partielle Induktivität

$$Lp_{km} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{a_k a_m} \iint_{v_k v_m} \frac{1}{(|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_m|} \,\mathrm{d}v_k \,\mathrm{d}v_m \,, \tag{2.58}$$

und ansonsten $Lp_{km} = 0$ für Stromrichtungen die orthogonal zueinander sind.

Die Existenz der Definition (2.57) sollte aber nicht den Eindruck vermitteln, dass Induktivitäten auf offenen Pfaden ohne Rückstrompfad physikalisch messbare Grössen sind. Sie dient lediglich zur stückweisen Definition einer geschlossenen Kreisinduktivität, sodass der PEEC-Solver bei unbekannter Stromverteilung in der Lage ist, sinnvolle Lösungen zu berechnen. Dies bedeutet insbesondere, dass Impedanzergebnisse, welche aus einer PEEC-Simulation resultieren, nur dann einen Sinn ergeben, wenn die Anschlusspunkte der Impedanzmessung einen geringen Abstand zueinander haben.

Das Vorzeichen der partiellen Induktivitäten (2.57) ergibt sich ausschliesslich aus der Definition der Stromrichtung l_k, l_m innerhalb einer PEEC-Volumenzelle; Selbstinduktivitäten sind demnach immer positiv.



Abb. 2.9: Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen der Kreisinduktivität L_{loop} und den partiellen Induktivitäten Lp.

Veranschaulichung der partiellen Induktivität anhand eines einfachen Beispiels

Da der Begriff der partiellen Induktivität recht abstrakt ist, wird im Folgenden ein Zahlenbeispiel für die Kreisinduktivität einer quadratischen Leiterschleife mit der Kantenlänge l = 10 mm gezeigt, wobei der Leiter selbst ein Runddraht mit dem Radius r = 0.5 mm ist (Abbildung 2.9). Die Stromdichte im Draht wird für niedere Anregungsfrequenzen als homogen angenommen. Mit Gleichung (2.52) und einer Integration über das Magnetfeld innerhalb der Leiterschleife erhält man folgenden genäherten Ausdruck für die Gesamtinduktivität [30]

$$L_{\text{loop}} = \frac{2\mu_0 l}{\pi} \left[\ln\left(\frac{2l}{r}\right) - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - 2 \right].$$
 (2.59)

Die Näherung gilt für $r \ll l$, die analytisch exakte Formel wäre wesentlich komplizierter. Durch Einsetzen von Zahlenwerten erhält man schliesslich die Induktivität $L_{\rm loop} = 17.7\,{\rm nH}$. Man beachte, dass für Drahtradien $r \to 0$ die Kreisinduktivität nicht definiert ist, obwohl die vom magnetischen Fluss eingeschlossene Fläche endlich ist. Dieses Beispiel verdeutlicht nun folgendes:

- Selbst für sehr einfache geometrische Anordnungen werden zur analytischen Berechnung der Kreisinduktivitäten komplizierte Formeln benötigt (siehe hierfür auch Seite 63. Für unregelmässigere geometrische Verhältnisse sind zudem analytische Ausdrücke nicht bekannt.
- Vergleicht man den Ausdruck (2.59) mit den analytisch berechenbaren Selbst- und Kopplungsinduktivitäten zwischen den geraden

Leitersegmenten, wie sie in Abschnitt 2.4 aufgeführt werden, erhält man denselben Wert für L_{loop} . Dabei wurde für die Berechnung $L_{\text{loop}} = 4Lp_{\text{self}} - |4Lp_{\text{mutual}}|$ verwendet. Die Kopplungsinduktivität L_{mutual} bezeichnet hier die Kopplung zweier paralleler Drahtsegmente.

• Falls man eine rechteckige Leiterschleife mit sehr unterschiedlichem Seitenverhältnis betrachtet, bzw. falls der Drahtdurchmesser in derselben Grössenordnung ist wie der Abstand, dann sind die Selbst- und Kopplungsinduktivität vom Betrag her vergleichbar gross. Für eine korrekte Berechnung muss deshalb sehr auf die Genauigkeit der Induktivitätswerte geachtet werden, sonst würde durch die Differenz der Rundungsfehler den Gesamtwert dominieren, was letztendlich zu instabilen Simulationen oder ungenauen Ergebnissen führt. Aus diesem Grund wird in Abschnitt 2.3.5 ein effizienter und genauer Algorithmus beschrieben, um die partiellen Induktivitäten für allgemeine, schiefwinklige Anordnungen zu berechnen.

2.3.3 Partielle Induktivitäten für orthogonale Volumenzellen

Für sehr einfache geometrische Anordnungen der Volumenzellen ist eine numerische Integration von (2.57) nicht nötig. Stattdessen können analytische Formeln angewandt werden. Generell gilt, dass analytische Lösungen effizienter berechnet werden können im Vergleich zur direkten Auswertung der Integrale. Ausserdem kann für Zellen, welche einen grossen Abstand voneinander haben, jeweils eine vereinfachte Näherung der analytischen Formeln verwendet werden, da die Green'sche Funktion (2.61) mit zunehmendem Abstand als näherungsweise konstant angenommen werden kann. Eine Zusammenfassung der Formeln ist im Anhang gegeben. Folgende Bedingung muss gegeben sein, damit die analytischen Formeln verwendet werden können:

- Die beteiligten Volumenzellen müssen Quader darstellen, welche ausschliesslich rechte Winkel besitzen.
- Für die Berechnung von Kopplungsinduktivitäten müssen die Volumenzellen parallel oder rechtwinklig zueinander stehen. Falls sie rechtwinklig angeordnet sind, verschwindet die Kopplungsinduktivität, andernfalls können die im Anhang A angegebenen analy-

tischen Formeln zur Berechnung der partiellen Kopplungsinduktivität verwendet werden.

• Falls die Retardierung berücksichtigt werden soll, kann die Laufzeit zwischen Signalen der Zellmittelpunkte verwendet werden. Dies ist aber lediglich eine Approximation, da sich die Phase der Wellen auch beim Durchlaufen innerhalb der Volumenzellen ändert.

Die ersten beiden Einschränkungen führen auf ein sogenanntes "Manhattan-Gitter". Man könnte prinzipiell jede Leiter-Geometrie durch ein Manhattan-Gitter approximieren, jedoch führt dies zu sehr grossen Modellen und damit zu einem unrealistisch grossen Aufwand beim Lösen der resultierenden Matrizengleichung. Deshalb wird im Folgenden eine Methode beschrieben, mit der die partiellen Elemente allgemeiner schiefwinkliger Anordnungen relativ effizient berechnet werden können.

2.3.4 Partielle Induktivitäten für schiefwinklige Zellgeometrien

Die orthogonale Formulierung partieller Induktivitäten, wie in (2.57) gegeben, lässt sich durch die Einführung eines schiefwinkligen lokalen Koordinatensystems vollkommen konsistent auf nichtorthogonale Zellen verallgemeinern. Das neue Koordinatensystem ist mit demjenigen der Widerstandsberechnung auf Seite 36 identisch. Eine detaillierte Berechnung hierzu findet man in [28]. Durch die Verwendung der Jacobi-Determinante des schiefwinkligen Koordinatensystems erhält man für die partiellen Induktivitäten schliesslich den Ausdruck

$$Lp_{aa'} = \mu \iiint_{a \ b \ c} \iiint_{a' \ b' \ c'} \hat{\boldsymbol{a}} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a} \right| \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial a'} \right| G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \ \mathrm{d}v \ \mathrm{d}v', \qquad (2.60)$$

wobei hier wieder die quasistatische Näherung der retardierten Green'schen Funktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk(r-r')}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
(2.61)

verwendet wurde. Die direkte numerische Auswertung von (2.60) ist leider sehr rechenaufwändig, insbesondere da im Sinne der Modellstabilität die Matrixeinträge der partiellen Induktivitäten mindestens auf einige Promille genau berechnet werden müssen [31].

2.3.5 Berechnung der partiellen Induktivitäten beliebiger Orientierung mittels analytischer Formeln für Stromfäden

Eine numerische Integration der Matrixeinträge von $Lp_{aa'}$ über (2.60) erfordert aufgrund der 6-fachen Integration (zwei Volumina) einen erheblichen rechnerischen Aufwand. Dabei kommt erschwerend hinzu, dass die Green'sche Funktion (2.61) im Integrationskern eine Singularität enthält, sobald benachbarte Zellen oder die Selbstinduktivität berechnet werden. Die Anzahl der zu berechnenden Matrixeinträge ist in der Grössenordnung n^2 , wobei n die Anzahl der PEEC-Volumenzellen ist.

Führt man im Integral (2.60) zur Berechnung beliebiger partieller Induktivitäten eine vierfache Dirac'sche δ -Funktion ein, so erhält man eine Beziehung zwischen unendlich dünnen Stromfäden, sogenannte Filamente, und der allgemeinen (schiefwinkligen) Formulierung der partiellen Induktivität [32]

$$Lp_{aa'} = \mu_0 \iiint_{a \ b \ c \ a'b' \ c'} \delta(b - b_0, b' - b'_0, c - c_0, c' - c'_0)$$
$$\dots \hat{\boldsymbol{a}'} \cdot \hat{\boldsymbol{a}} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a} \right| \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial a'} \right| G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \ \mathrm{d}v \ \mathrm{d}v' \tag{2.62}$$

$$= Lp_{\rm ff}(b_0, b'_0, c_0, c'_0)$$

Die geometrischen Verhältnisse hierzu sind in Abbildung 2.10 dargestellt. Verwendet man die Eigenschaft $\int \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$ eines Integrals über die Dirac'sche δ -Funktion, erkennt man, dass sich das zweifache Volumenintegral durch ein zweifaches Oberflächenintegral ausdrücken lässt.

Deshalb kann ein vereinfachter Ausdruck für die Berechnung beliebiger partieller Induktivitäten schiefwinkliger Zellen mittels der Kopplungsinduktivität zwischen Stromfäden verwendet werden

$$Lp_{aa'} = \iiint_{b \ b'c \ c'} Lp_{\rm ff}(b, b', c, c') \mathrm{d}a \ \mathrm{d}a' \mathrm{d}b \ \mathrm{d}b'.$$
(2.63)

Dies ist eine leichter zu berechnende Beschreibung des doppelten Volumenintegrals Lp in Gleichung (2.60): Mithilfe der als analytische Lö-



Abb. 2.10: Zwei induktiv gekoppelte, schiefwinklige PEEC-Volumenzellen mit den Stromrichtungen a und a'. Die zwei Koordinatenkreuze stellen jeweils ein lokales nichtorthogonales Koordinatensystem dar, wie es z. B. in [28] eingeführt wurde. Ausserdem sind zwei Stromfäden in Stromrichtung skizziert, welche, wie im Text beschrieben, zur Herleitung der neuen Integrationsmethode führen.

sung bekannten Kopplungsinduktivität $Lp_{\rm ff}()$ zwischen eindimensionalen Stromfäden kann die Dimension des Integrals um zwei reduziert werden.

Analytische Formeln für die Kopplungsinduktivität $Lp_{\rm ff}()$ beliebig angeordneter Stromfäden sind in den Büchern von Grover [30] oder Paul [33] angegeben, welche in modifizierter Form im Anhang A.3 wiedergegeben werden. Die Formeln enthalten relativ komplexe Ausdrücke verschiedener hyperbolischer und trigonometrischer Funktionen. Dennoch führt eine numerische Auswertung von (2.63) zu einer effizienteren Berechnung der Integrale. Neben der Ordnungsreduktion der Integraldimension wird der Effizienzgewinn dadurch verursacht, dass die Singularität der Green'schen Funktion (2.61) durch Anwendung der Filamentformeln geglättet wird und somit eine bessere Konvergenz des Integrationsalgorithmus gewährleistet ist. Die Glättung des Integralkerns ist in Abbildung 2.11 skizziert.

Diese Glättungseigenschaft der Stromfäden ermöglicht insbesondere für die Selbstinduktivität (mit v = v') und für Kopplungsinduktivitäten benachbarter Zellen eine beschleunigte Integration, falls stattdessen (2.62) direkt integriert würde. In Abschnitt 2.3.7 wird gezeigt, dass derselbe Mechanismus auch zur beschleunigten Berechnung der Koeffizienten des Potentials verwendet werden kann.



Abb. 2.11: Kopplungsinduktivität zweier paralleler Stromfäden mit der Länge l = 1 cm. Bei der Annäherung der Stromfäden $(d \to 0)$ divergiert die Kopplungsinduktivität $M \to \infty$. Die Divergenzgeschwindigkeit $\propto \log(2l/r)$ ist jedoch sehr viel kleiner als diejenige der Green'schen Funktion mit |1/d|, was eine effizientere numerische Integration der partiellen Elemente ermöglicht.

Anwendungsbeispiel der vereinfachten Berechnung partieller Induktivitäten

Hier soll anhand des einfachen Beispiels zweier Volumenzellen aus Abbildung 2.12, deren Koordinaten der Eckpunkte gegeben sind, die Leistungsfähigkeit der vereinfachten Berechnung der partiellen Induktivitäten verdeutlicht werden. Dabei wird eine direkte Gauss-Legendre-Integration der Formel (2.60) mit dem hier vorgestellten Ansatz in Bezug auf die Rechengeschwindigkeit und Genauigkeit der Ergebnisse verglichen. Hierbei ist die Geometrie der zwei Testzellen bewusst sehr einfach gehalten, um dem Leser die Möglichkeit zu geben andere Algorithmen oder Lösungsansätze mit den hier gezeigten zu vergleichen.

Die Zelle 1 aus Abbildung 2.12 ist ein orthogonaler Block, für dessen Eigeninduktivität Lp_{11} eine analytische Formel (A.3) existiert, sodass die numerisch berechneten und mit Fehlern behafteten Integralwerte direkt mit einer analytischen Lösung verglichen werden können. Die zweite Volumenzelle ist schiefwinklig, deshalb ist hier für die Berechnung der Induktivitäten Lp_{22} und Lp_{12} zwingend eine Integration notwendig, da hierfür keine analytischen Ausdrücke existieren. Die zwei Volumen-



Abb. 2.12: Beispiel PEEC-Zellgeometrie: die Abbildung zeigt zwei induktive Volumenzellen mit den Punktkoordinaten (angegeben in mm), sodass die numerischen Ergebnisse der partiellen Induktivitäten nachvollziehbar sind. Zwei der drei möglichen Stromrichtungen innerhalb der Zellen wurden durch gepunktete oder gestrichelte Linien eingezeichnet.

zellen berühren sich an einer Stirnfläche, was für die Berechnung der Kopplungsinduktivität den ungünstigsten Fall darstellt, denn an der Berührungsstelle muss über die Singularität der Green'schen Funktion integriert werden. Das Seitenverhältnis der zwei Zellen ist mit $l/w \approx 10$ relativ gross, solch extreme Längenverhältnisse der Zellen sind aber für viele PEEC Anwendungen typisch, wie z. B. in [34] und [35].

Um einen zweiten Vergleichstest für die numerisch integrierte Kopplungsinduktivität zu erhalten wurde in Abbildung 2.12 neben der Hauptstromrichtung (rot gestrichelt, Lp_{12}) noch eine weitere Stromrichtung (grün gepunktet, Lp_{34}) eingezeichnet.

Die oben entwickelte Methode zur Berechnung nichtorthogonaler partieller Induktivitäten wurde in einem C++-Programm implementiert, die Integration selbst wurde hier durch einen adaptiven Integrationsalgorithmus mit Fehlerabschätzung realisiert [36], sodass sich die Anzahl der Funktionsauswertungen $Lp_{\rm ff}()$, d. h. die Anzahl der Stützpunkte für die Integration, adaptiv an die geometrischen Verhältnisse anpasst. So sind bei einem grossen Zellabstand nur sehr wenige Stützstellen nötig, um eine ausreichende Genauigkeit für die partiellen Elemente zu erhalten. Berühren sich zwei benachbarte Zellen wie in Abbildung 2.12, dann wird die Anzahl der Integrationsstützpunkte an der Berührungsfläche stark zunehmen und damit gewährleisten, dass die Integration über die immer noch vorhandene, aber schwache Singularität ausreichend genau ist. Dabei wurde der in [36] gegebene Algorithmus auf mehrere Dimensionen erweitert, sodass das benötigte vierfache Integral durch alleinige Angabe der Eckpunkte der PEEC-Volumenzelle berechnet werden kann.

Als Vergleichsalgorithmus dient eine in [37] und [38] vorgeschlagene adaptive Gauss-Legendre (GL) Integrationsmethode, welche den Ausdruck (2.60) durch direkte Integration beider Volumina auswertet. Die numerischen Ergebnisse der beiden Integrationsalgorithmen für das Zellbeispiel sind in Tabelle 2.3.5 zusammen mit der benötigten Berechnungsdauer zusammengefasst. Dabei wurden verschiedene Auflösungen bzw. Anzahl der Integrationsstützstellen N verwendet. Hierbei ist Njeweils die Gesamtzahl der Stützpunkte (GL) bzw. im Fall der hier neu eingeführten Integration über Stromfäden ist N die Gesamtzahl der Auswertungen von $Lp_{\rm ff}()$. Sämtliche Berechnungen wurden auf einem PC mit einer Taktfrequenz von 3 GHz durchgeführt.

Aufgrund der Singularität der Green'schen Funktion (2.61) sind sämtliche Induktivitätsergebnisse der GL Integration kleiner als der exakte Wert. Auch mit einer sehr feinen Unterteilung der Stützpunkte und dem damit verbundenen grossen numerischen Aufwand erhält man keine zufriedenstellend genauen Ergebnisse. Im Gegensatz dazu zeigt die hier neu vorgeschlagene Methode ein gutes Konvergenzverhalten, welches innerhalb einer vernünftigen Rechenzeit ausreichend genaue Ergebnisse liefert.

Betrachtet man die angegebenen Berechnungszeiten, welche in der Grössenordnung von einigen Millisekunden (Filamentintegration) bis zu 2 Sekunden (GL-Integration) liegen, so sollte man sich im Klaren darüber sein, dass die für ein PEEC Modell typische Zellenanzahl in der Grössenordnung von 10^4 liegt, die benötige Anzahl zu berechnender Kopplungsinduktivitäten liegt damit bei 10^8 . Der Geschwindigkeitsgewinn der neu eingeführten Integration von ca. zwei Grössenordnungen trägt deshalb wesentlich zu einer kürzeren Gesamtsimulationszeit bei.

Natürlich wird die meiste Rechenzeit für die Diagonaleinträge (Selbstinduktivitäten) der Matrizen benötigt. Nebendiagonalelemente (Kopplungsinduktivitäten) benötigen einen geringeren Berechnungsaufwand, für sehr weit voneinander entfernte Zellen ist oft die Berechnung der Kopplungsinduktivität eines einzelnen Stromfadens ausreichend. Damit ist die numerische Komplexität der partiellen Elementberechnung auf

	$Lp_{11}[nH]$	$Lp_{22}[nH]$	$Lp_{12}[nH]$	$Lp_{34}[nH]$
	N	N	N	N
	T[ms]	T[ms]	T[ms]	T[ms]
Analytisch exakt	9.8936	_	_	_
Neuer Filament-	9.8934	5.70895	4.52591	0.364282
Integrations-	9E6	9E6	2E5	2E5
Algorithmus	1E4	1E4	320	340
	9.8921	5.70881	4.5260	0.36438
**	1E5	1E5	14065	12889
	130	200	22	21
	9.8958	5.71733	4.52618	0.369
*	2401	2401	3277	2485
	2.7	3.9	5.2	4.1
Konventionelle	9.58759	5.424	4.16366	0.3633
Gauss-Legendre	2E6	2E6	2E6	2E6
Integration	2000	2000	2000	2000
	9.4819	5.025	4.153	0.3625
	$7\mathrm{E5}$	$7\mathrm{E5}$	$7\mathrm{E}5$	7E5
	600	600	600	600

Tabelle 2.2: Vergleich der Integrationsmethoden für partielle Induktivitäten Lp_{km} der Volumenzellen-Geometrie aus Abbildung 2.10. Die Ergebnisse sind nach Integrationsmethode und der Anzahl der benötigten Stützpunkte gegliedert, ausserdem ist die Berechnungszeit der partiellen Elemente angegeben.

 $o(n^2)$ beschränkt, wobei hier mit n die Anzahl der zu modellierenden PEEC-Zellen gemeint ist.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich mit der neuen Berechnungsmethode typische Problemgrössen von $n = 10^4$ Volumenzellen je nach gewünschter bzw. benötigter Genauigkeit innerhalb einiger Minuten bis zu maximal einer Stunde berechnen lassen. Eine beschleunigte Berechnung wird auch dadurch unterstützt, dass die CPUs moderner Rechner mehrere Kerne besitzen. Die Berechnung der einzelnen Matrixeinträge der partiellen Elemente lässt sich einfach parallelisieren. Die früher vorgeschlagene GL-Integration [38] würde dafür eine Berechnungszeit in der Grössenordnung von Tagen benötigen. In diesem Abschnitt wurde nur die Berechnung von partiellen Induktivitäten anhand der neuen Methode diskutiert, der Ansatz ist aber ebenso für die Berechnung von Potentialkoeffizienten möglich, wie in Abschnitt 2.3.7 gezeigt wird.

2.3.6 Potentialkoeffizienten

Die Matrix der Potentialkoeffizienten, wie sie rein mathematisch auf Seite 33 definiert wurde, entbehrt zunächst der Anschaulichkeit. Deshalb soll hier zunächst die Verbindung der Potentialkoeffizienten mit verschiedenen Kapazitätsmatrizen aufgezeigt werden. Der Grund für die fehlende Anschaulichkeit ist zum einen, das in der Elektronikpraxis fast ausschliesslich Kapazitäten zwischen zwei bestimmten Terminals betrachtet und gemessen werden, andererseits führt die Kopplung gegen Erde zu missverständlichen Definitionen, da allgemein als Erdpotential nicht das Potential eines beliebigen Leiters gemeint ist, sondern das Potential im Unendlichen. Für Mehrleiteranordnungen müssen die entsprechenden Grössen jedoch in Matrixform festgelegt werden. Ausführliche Literatur zur Theorie der Kapazitätsmatrizen ist rar, [39], [40] und [41] sind hier zur weiteren Lektüre empfohlen. Die folgende Darstellung verschiedenen Kapazitätsmatrizen ist im Wesentlichen an [39] angelehnt. Ausserdem wird hier eine erdfreie Formulierung der Kapazitätsmatrizen diskutiert, durch welche eine Entkopplung der PEEC Matrizen vom im Unendlichen befindlichen Erdpotential erreicht wird.

Die Kurzschluss-Kapazitätsmatrix

Mit den Potentialen ϕ_j der einzelnen Leiter kann man die Ladungen auf den Leitern durch

$$Q_i = \sum_{j=1}^n c_{ij}\phi_j \tag{2.64}$$

beschreiben. Die $n \times n$ -Matrix $C = [c_{ij}]$ ist die sogenannte Kurzschluss-Kapazitätsmatrix, deren Einträge sind die Kurzschluss-Kapazitäten. Das Element c_{ij} gibt genau die Ladung auf i an, falls sich der Leiter j auf Einheitspotential befindet und alle übrigen Leiter geerdet sind, das Nullpotential liegt dabei im Unendlichen.

C besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Die Matrix ist symmetrisch, d. h. $c_{ij} = c_{ji}$.
- Die Diagonaleinträge sind positiv, $c_{ii} > 0$ da der Leiter *i* bei positivem Potential eine positive Ladung besitzen muss, falls alle anderen Leiter geerdet sind.
- Sämtliche Nebendiagonalelemente sind negativ, d. h. $c_{ij} < 0$, falls $i \neq j$, was man ähnlich wie für die Diagonalelemente argumentieren kann.
- Die Matrix C ist diagonal dominant, d. h.

$$c_{ii} > -\sum_{\substack{j=1\\j \neq i}}^{n} c_{ij},$$
 (2.65)

und damit ist C auch symmetrisch positiv definit.

Die letzte Eigenschaft ist für die Implementierung eines PEEC-Solvers zur Kontrolle der Korrektheit der Matrizen wichtig. Mit der PEEC-Methode wird zwar C nicht direkt berechnet, sondern die Matrix der Potentialkoeffizienten $P = C^{-1}$, durch eine Inversion von P mittels einer Cholesky-Faktorisierung kann aber leicht festgestellt werden, ob die Matrix positiv definit ist, und ob die Vorzeichenbedingungen der Kurzschluss-Kapazitätsmatrix erfüllt sind. Die kapazitive Gesamtenergie des elektrischen Feldes einer Mehrleiteranordnung kann mithilfe der quadratischen Form als

$$W_{\rm cap} = \frac{1}{2} \phi C \phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi_i c_{ij} \phi_j$$
(2.66)

berechnet werden. Falls C die oben erwähnten Eigenschaften nicht besitzt, ist es sehr wahrscheinlich, dass das generierte PEEC-Modell fehlerhaft oder in Zeitbereichssimulationen sogar instabil ist.

Zwei-Terminal-Kapazitätsmatrix

In gewöhnlichen Schaltungssimulatoren wie SPICE oder Gecko-CIRCUITS wird nicht die Kurzschlusskapazität verwendet, sondern die diskreten Kapazitäten sind durch sogenannte Zwei-Terminal-Kapazitäten gegeben. Den Zusammenhang zwischen der anschaulichen Zwei-Terminal-Kapazität und der Kurschlusskapazitätsmatrix C^t findet man in [39] erläutert:

Diagonale
$$[\boldsymbol{C}]_{ii}^t = \sum_{j=1}^n c_{ij},$$

Nebendiagonale $[\boldsymbol{C}]_{ij}^t = -c_{ij}.$ (2.67)

Aufgrund der strikten Diagonaldominanz der Kurzschluss-Kapazitätsmatrix und der oben beschriebenen Vorzeichenbedingungen sind sämtliche Einträge der Zwei-Terminal-Kapazitätsmatrix positiv.

Koeffizienten des Potentials

Die Definition der Kapazitätsmatrix C legt die Matrixeinträge fest, indem für vorgegebene Potentiale die Ladung auf den Leitern bestimmt wird. In der PEEC Formulierung einer leitenden Geometrie tritt aber genau der umgekehrte Fall ein, die Ladungen werden als bekannt angenommen und man ist an der Verteilung des Potentials interessiert. Löst man Gleichung (2.64) durch Matrixinversion nach den Potentialen auf, erhält man

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j \tag{2.68}$$

wobei $\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}$ die Matrix der Potentialkoeffizienten ist. Die Matrixeinträge von \mathbf{P} werden bei der PEEC-Simulation direkt aus der Zellgeometrie der Oberflächenzellen bzw. deren gegenseitigen Anordnung berechnet [5]. Die PEEC-Systemmatrizen können wahlweise \mathbf{P} selbst enthalten, oder durch die durch Matrixinversion bestimmte Kapazitätsmatrix. Eine Matrixinversion ist eine numerisch aufwändige Operation mit einer Komplexität von $\mathcal{O}(n^3)$. Da \mathbf{P} symmetrisch positiv definit ist, kann die Faktorisierung der Matrix anhand einer Cholesky-Dekomposition durchgeführt werden. Falls eine erdfreie Formulierung der PEEC-Systemmatrizen gewünscht ist, wie im nächsten Abschnitt beschrieben, so lässt sich die Matrixinversion nicht vermeiden. Diese Inversion muss aber für jede Simulation nur einmal durchgeführt werden, sodass sich der numerische Aufwand doch in Grenzen hält.

Erdfreie Kapazitätsformulierung

In PEEC-Simulationen kommt es häufig vor, dass man der Bequemlichkeit halber externe diskrete Bauteile wie z. B. Widerstände oder gesteuerte Quellen einführt, welche ein nur einziges Terminal definieren, das zweite Terminal sollte deshalb auf einem gemeinsamen Erdpotential liegen. Um eine gute Konditionierung der Matrizen zu erreichen, ist zumindest ein geerdetes Bauteil zwingend erforderlich, wie in Abschnitt 2.1 gezeigt wurde, andernfalls werden die Systemmatrizen näherungsweise singulär. Hierbei ist aber besondere Vorsicht geboten, denn das vom Softwareanwender beabsichtigte Erdpotential ist nicht gleichzusetzen mit dem Potential im Unendlichen, welches über die Potentialkoeffizienten bzw. die Kurzschluss-Kapazitätsmatrix gekoppelt ist.

Aus diesem Grund wird in dem hier verwendeten PEEC-Solver die Kapazitätsmatrix in einer erdfreien Formulierung verwendet, d. h. eine ungewollte Erdverbindung zwischen externen Beschaltungsbauteilen und der Kapazitätsmatrix wird explizit unterbunden.

Die Notwendigkeit dieser Entkopplung sieht man leicht ein: Falls der Benutzer eine bestimmte Leiterposition (und nur diese) als Nullpotential definieren möchte, kann er dies durch die Einführung eines Widerstandes, welcher nur einen einzelnen Eintrag in der Inzidenzmatrix (2.2) hat, tun. Bei höheren Frequenzen hängen die Impedanzergebnisse aber vom konkreten Widerstandswert ab, was nicht der Fall sein darf. Durch den Erdwiderstand wird ungewollt ein zusätzlicher Strompfad zwischen sämtlichen Kurzschluss-Kapazitätswerten c_{ii} und dem neu eingeführten Bauteil hergestellt.

Durch die folgende Modifikation wird die Kapazitätsmatrix C in die entkoppelte Kapazitätsmatrix C_0 übergeführt:

$$[C_{0}]_{ij} = C_{ij} + \frac{C_{ij}^{2}}{\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} C_{lm}} - \frac{C_{ij} \left[\sum_{\substack{m=1 \ m\neq j}}^{n} C_{im} + \sum_{\substack{m=1 \ m\neq i}}^{n} C_{mj} \right] - \left(\sum_{\substack{m=1 \ m\neq j}}^{n} C_{im} \right) \left(\sum_{\substack{m=1 \ m\neq i}}^{n} C_{mj} \right)}{\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} C_{lm}}.$$
(2.69)

Die Entkopplung (2.69) entspricht der Entfernung des im Unendlichen liegenden Potentials aus dem kapazitiven Netzwerk mit der Annahme, dass sich die Gesamtladung im Simulationsmodell

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0 \tag{2.70}$$

zu Null addieren muss. Effektiv wird dadurch erreicht, dass das Erdpotential vom geometriebedingten kapazitiven Netzwerk getrennt wird, d. h. die Kapazitätsmatrix C_0 ist demzufolge singulär, und die Diagonalkomponenten C_0 enthalten gerade den Absolutbetrag der Summe der Nebendiagonalelemente. Falls im PEEC-Netzwerk keine externen Bauteile mit dem Erdpotential verbunden sind, wird auch die gesamte PEEC-Systemmatrix singulär. Eine explizite Erdung durch eine zusätzliche Beschaltungskomponente, wie auf Seite 20 beschrieben, ist dann zwingend erforderlich. Deshalb muss nach der Umwandlung der Kapazitätsmatrix C in C_0 entweder eine Zeile und Spalte aus der Systemmatrix entfernt werden, oder der Benutzer hat explizit einen Punkt der Leiterbahnen als Nullpotential mithilfe einer externen und geerdeten Komponente zu definieren. Letztere Lösung wurde für das hier implementierte Simulationsprogramm gewählt.

2.3.7 Mathematische Analogie zwischen partiellen Induktivitäten und Potentialkoeffizienten

In diesem Abschnitt wird ein mathematischer Zusammenhang zwischen partiellen Induktivitäten und den Koeffizienten des Potentials gezeigt, welcher es erlaubt anhand der teils analytischen Formeln oder Integrale für Induktivitäten die entsprechenden Koeffizienten des Potentials ähnlicher Zellen auszudrücken.

Die Methode wird zunächst der Einfachheit halber für orthogonale Geometrien gezeigt und später auf nichtorthogonale Zellen verallgemeinert. Der vorgestellte Weg ist allgemein nur möglich, da partielle Eigeninduktivitäten nicht nur für stromführende Volumen definiert sind, sondern auch für stromführende Oberflächen.

Orthogonale Zellen

Fasst man die Induktivitätsberechnung für orthogonale Stromzellen,

$$Lp_{km} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{a_k a_m} \iint_{v_k v_m} \frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_m|} dv_k dv_m$$

= $\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{a_k a_m} \iint_{v_k v_m} \frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_m|} dl_k dl_m dw_k dw_m dt_k dt_m,$ (2.71)

und die Formeln für die Potentialkoeffizienten,

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{S_i S_j} \iint_{S_i S_j} \frac{1}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} \mathrm{d}S_i \mathrm{d}S_j , \qquad (2.72)$$

zusammen, erkennt man eine augenscheinliche Analogie: es wird bis auf die Vorfaktoren und über dieselbe Green'sche Funktion integriert. Die Volumenintegrale in (2.71) wurden hierbei in Integrationen über die Leiterdicke t_k , der Breite w_k und der Länge l_k in Stromrichtung aufgeteilt, d. h. es gilt $dv_k = dl_k dw_k dt_k$ und $a_k = w_k \cdot t_k$. Nimmt man nun den Grenzfall zweier Volumenzellen, deren Dicke t_i und t_j gegen Null strebt, erhält man für die partielle Induktivität den Ausdruck

$$Lp_{km} = \lim_{\substack{t_k \to 0 \\ t_m \to 0}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{w_k w_m t_k t_m} \iint_{v_k v_m} \frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_m|} \, \mathrm{d}l_k \, \mathrm{d}l_m \, \mathrm{d}w_k \, \mathrm{d}w_m \, \mathrm{d}t_k \, \mathrm{d}t_m \,.$$
(2.73)

Aufgrund der Tatsache, dass partielle Induktivitäten und insbesondere partielle Selbstinduktivitäten auf einer leitenden Oberfläche wohldefiniert und endlich sind (siehe analytische Formeln im Anhang A) ist auch der Grenzwert in (2.73) definiert, und man erhält

$$Lp_{km} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{w_k w_m} \iint_{S_k S_m} \frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_m|} \, \mathrm{d}l_k \, \mathrm{d}l_m \, \mathrm{d}w_k \, \mathrm{d}w_m \,. \tag{2.74}$$

Fasst man die Vorfaktoren und die übrig gebliebene Oberflächen
integration wieder in $S_k = w_k \cdot l_k$ zusammen

$$Lp_{km} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{l_k l_m}{S_k S_m} \iint_{S_k S_m} \frac{1}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_m|} \, \mathrm{d}S_k \, \mathrm{d}S_m \,, \tag{2.75}$$

so wird der Zusammenhang zwischen der Induktivität und der Definition der Potentialkoeffizienten noch offensichtlicher. Damit können anhand der analytischen Formeln für Induktivitäten auf rechteckigen stromführenden Oberflächenzellen die Koeffizienten des Potentials berechnet werden

$$P_{km} = \frac{l_k l_m \cdot L p_{km}}{\mu_0 \epsilon_0} , \qquad (2.76)$$

wobei l_k und l_m die in Stromrichtung zeigenden Längen der Zelle sind. Folgende Anmerkungen sind zur Herleitung dieses Zusammenhangs angebracht:

- 1. Der Grenzübergang von (2.73) auf (2.74) wurde etwas unsauber durchgeführt, einen mathematisch exakten Weg erhält man durch die Verwendung der Dirac'schen δ -Pulsfunktion.
- 2. Im Anhang von [25] wurde ohne weitere Herleitung ein ähnlicher Zusammenhang $P = \frac{Lp}{\epsilon_0\mu_0}$ erwähnt, wobei dort die Normierung der Längen l_k und l_m vergessen wurden. Ein einfacher Vergleich der Einheiten von Lp_{km} und P_{km} zeigt jedoch, dass der Zusammenhang (2.76) richtig sein muss:

$$\begin{split} [L] &= 1 \, \mathrm{Henry} = 1 \, \mathrm{H} \\ [P] &= \frac{1}{\mathrm{Farad}} = \frac{1}{\mathrm{F}} \\ [\epsilon_0] &= 1 \, \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \\ [\mu_0] &= 1 \, \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \, . \end{split}$$

3. Die obigen Gleichungen gelten sowohl für die Kopplungseinträge (Nebendiagonalen der Matrizen) als auch für die Diagonaleinträge, da bei der Herleitung nicht ausgeschlossen wurde, dass die Zellen voneinander verschieden sein müssen.

Schiefwinklige Zellanordnungen

In einem nächsten Schritt sollen zunächst orthogonale Zellen, welche schiefwinklig zueinander angeordnet sind, betrachtet werden. Auch hier lässt sich die Analogie zwischen Potentialkoeffizienten und Induktivitäten verwenden, um eine schnelle und exakte Berechnung der Potentialkoeffizienten zu erreichen. In diesem Fall wird die partielle Induktivität durch

o. o

$$L_{p_{km}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{a_k a_m} \int_{a_k} \int_{a_m} \int_{b_k} \int_{b_m}^{c_k} \int_{b_m}^{c_m} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_k \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_m}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_m|} \,\mathrm{d}a_k \,\mathrm{d}a_m \tag{2.77}$$

beschrieben, wobei durch das Skalarprodukt in Stromrichtung im Nenner ein Faktor cos ϵ für die Induktivitätsberechnung auftritt. Im Falle schiefwinkliger Anordnungen ist für die Potentialkoeffizienten immer noch (2.72) gültig. Damit kann analog zum obigen Weg der Zusammenhang zwischen Potentialkoeffizienten schiefwinklig angeordneter Zellen erweitert werden zu

$$P_{km} = \frac{l_k l_m \cdot L p_{km}}{\mu_0 \epsilon_0 \cos \epsilon} , \qquad (2.78)$$

wobei ϵ hier der Winkel zwischen den schiefwinkligen Zellen ist. Da eine analytische Beschreibung der Induktivitäten hier nicht vorhanden ist, mag man sich zunächst nach dem Sinn von (2.78) fragen. Durch diese Erweiterung kann mit der Methode aus Abschnitt 2.3.5 die Berechnung der Potentialkoeffizienten vereinfacht werden. Letztendlich werden die doppelten Oberflächenintegrale aus (2.72) zu einem zweidimensionalen Integral über Filamente reduziert und ermöglichen damit erst die Auswertung der Integrale in realistischer Rechenzeit. Die analytischen Formeln für Kopplungsinduktivitäten zwischen Stromfäden (Filamenten) sind im Anhang (A.3) gegeben.

Zunächst taucht die Frage auf, ob Gleichung (2.78) bei einem Winkel von $\epsilon = 90^{\circ}$ aufgrund $\cos 90^{\circ} = 0$ überhaupt sinnvoll ist. Im diesem Fall könnte die Stromrichtung der Zellen immer auch in gleicher Richtung definiert werden, z. B. senkrecht zur ursprünglichen Richtung der Filamente. Dies ist möglich, da die Orientierung der Filamente für die Berechnung der Potentialkoeffizienten keine Rolle spielen darf. Ausserdem erkennt man mit Gleichung (A.4) für beliebig angeordnete Filamente, dass sich der Faktor $\cos \epsilon$ heraushebt; damit ist auch für diesen Fall der Grenzwert $\epsilon \to 0$ von (2.78) sinnvoll.



Abb. 2.13: Zwei Oberflächenzellen eines PEEC-Modells. Blau eingezeichnet sind parallele Ladungsfäden mit adaptivem Abstand, welche zur schnellen Berechnung der Integrale verwendet werden.

Beliebige nichtorthogonale Oberflächenzellen

Hier soll der Integrationsalgorithmus zur schnellen Berechnung der Potentialkoeffizienten schiefwinkliger Zellen besprochen werden. Die nichtorthogonale Formulierung aus [28] lautet

$$Pn_{aa'} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{a\ b\ a'b'} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}A'.$$
(2.79)

Im Vergleich zur Definition der schiefwinkligen Berechnung der Induktivität (2.60) fällt hier auf, dass kein Skalarprodukt und damit auch kein Beitrag der Jacobi-Determinante auftritt. Dies ist auch sofort einsichtig, denn die Oberflächenzellen sind im Modell mit Ladung behaftet, wobei die Oberflächenladungsdichte konstant über die Fläche verteilt ist. Um den auf Stromfäden basierenden Ansatz und die Analogie zwischen partiellen Induktivitäten und Potentialkoeffizienten anzuwenden, muss dies bei der Integration beachtet werden.

Abbildung 2.13 zeigt zwei schiefwinklige Oberflächenzellen. Man beachte den Unterschied zur Induktivitätsberechnung: Die blau eingezeichneten Ladungsfäden sind parallel, da die Oberflächenladungsdichte konstant sein muss. Der geringer werdende Abstand der Ladungsfäden an
der Zellgrenze zur Nachbarzelle soll keine ansteigende Ladungsdichte darstellen, sondern ist ein Artefakt des Integrationsalgorithmus [36], der seine Stützpunktanzahl aufgrund der singulären Green'schen Funktion an dieser Stelle erhöht.

2.4 Erweiterung der PEEC-Methode auf zylindrische Zellen

Im Folgenden soll eine Erweiterung der möglichen PEEC-Zellen auf zylinderförmige Geometrien besprochen werden [42]. Für diese Erweiterung ist lediglich die Berechnung der Koeffizienten des Potentials auf Zylinderoberflächen und der partiellen Induktivitäten in Zylindervolumen nötig. Die hier vorgestellte Erweiterung hat zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten zur Vereinfachung von elektromagnetischen Modellen. So sind z. B. die Modellierung von (geschirmten) Kabeln, Verbindungsdrähten, Bonddrähten auf Leistungsmodulen oder sonstiger diskreter Halbleiterbauelemente vorteilhaft mit runden Zelldiskretisierungen durchzuführen.

Würde man die hier vorgestellten Zylinderzellen durch quaderförmige Zellen ersetzen, ergäbe sich eine unnötige Abweichung der Simulationsergebnisse von der Realität. In [25] wird zwar diskutiert, dass eine zylindrische Zelle anhand einer Ersatzzelle mit quadratischer Querschnittsfläche w^2 und der Seitenlänge von

$$w = 1.745 r$$
 (2.80)

angenähert werden kann, wobei r der ursprüngliche Radius der Zylinderzelle ist, jedoch ist dies nur eine ungenaue Näherung und, wie gleich gezeigt, unnötig, da analytisch exakte Formeln für zylindrische PEEC-Zellen verfügbar sind. Ähnlich wie bei der herkömmlichen PEEC-Diskretisierung sind die Oberflächenzellen um einen halbe Zellenlänge versetzt zu den Volumenzellen. Die Anordnung der Knoten, Oberflächenund Volumenzellen sind in Abbildung 2.14 dargestellt. Selbstverständlich können die verschiedenen Zellarten auch in einem Modell kombiniert werden, d. h. die zylindrischen Zellen können an den Potentialknoten mit kuboidischen Zellen oder diskreten Komponenten verbunden werden.

Da die Feldverteilung des Magnetfeldes eines zylindrischen Drahtes ausserhalb des Leiters rotationssymmetrisch ist, und damit identisch zu



Abb. 2.14: Diskretisierung der PEEC Volumen- und Oberflächenzellen. Zylindrische Zellen lassen sich, analog zu den sonst üblichen Zellen, durch einen Versatz einer halben Zelllänge zwischen Volumenzellen und Oberflächenzellen darstellen.

einer Feldverteilung, welche einem unendlich dünnen Stromfaden entspricht, kann man die Kopplungsinduktivitäten zwischen Zylinderzellen entsprechend Gleichung (A.4) berechnen. Werden hingegen partielle Induktivitäten und Kapazitäten zwischen zylindrischen Zellen und anderen Zellformen berechnet, kann die Integrationsmethode aus Abschnitt 2.3.5 verwendet werden. Eine wesentliche Vereinfachung erreicht man wieder dadurch, dass das Feld der Zylinderzelle rotationssymmetrisch ist, wodurch sich das vierfache Integral (2.63) zu einem Dreifachintegral reduziert. Das bedeutet, dass hier ersatzweise die Gleichungen für einen Stromfaden im Zentrum der Zylinderzelle verwendet werden können, anstatt über das gesamte Zylindervolumen zu integrieren.

Schliesslich ist noch die Berechnung der Selbstinduktivität und des Eigen-Potentialkoeffizienten einer Zylinderzelle zu diskutieren. In [30] findet man eine analytische Formel für die partielle Selbstinduktivität der Zylinderzelle,

$$Lp = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{2l}{r}\right) - \frac{3}{4} \right], \qquad (2.81)$$

welche eine weite Verbreitung hat. Man darf jedoch nicht vergessen, dass (2.81) nur eine Näherung für $l \gg r$ ist und deshalb für den hier implemmentierten PEEC-Solver, welcher für sehr variable Längenverhältnisse l/r Gültigkeit besitzen muss, nicht eingesetzt werden sollte. Deshalb wird folgend die analytisch exakte Lösung, wie sie in [43] hergeleitet wird, verwendet

$$Lp = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{l}{r} + \sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}\right) - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} + \frac{r}{l} + \frac{1}{4} \right] . \quad (2.82)$$

Für die Selbstpotentialkoeffizienten von Zylinderzellen ist zunächst keine analytische Formel in der Literatur auffindbar, da diese Zellform offensichtlich bisher in keinem PEEC-Solver Anwendung fand. Jedoch kann eine Formel aus der Induktivität bei hohen Frequenzen einfach hergeleitet werden:

Nimmt die Anregungsfrequenz eines Leiters soweit zu, dass die Skintiefe (2.50) geringer wird als der Leiterdurchmesser, dann wird die Stromverteilung innerhalb des Leiters mehr und mehr an der Oberfläche stattfinden. Bemerkenswert ist hierbei, dass die Induktivität eines reinen Oberflächenstromes immer noch endlich und wohldefiniert ist. Mittels [30] und [43] findet man damit einen analytischen Ausdruck für die Eigeninduktivität einer stromführenden Zylinderoberfläche

$$Lp = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{l}{r} + \sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}\right) - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} + \frac{r}{l} \right] . \quad (2.83)$$

Aufgrund der mathematischen Analogie der Definition von Potentialkoeffizienten und der partiellen Induktivitäten (siehe Kapitel 2.3.7) ergibt sich dadurch der geschlossenen Ausdruck für den Potentialkoeffizienten einer zylindrischen Oberflächenzelle

$$P_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{l}{r} + \sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}\right) - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} + \frac{r}{l} \right] . \quad (2.84)$$

2.5 PEEC Modell einer Toroidspule

Als erstes Beispiel für die Anwendung des PEEC Solvers wird in Abbildung 2.15 das elektromagnetische Modell einer einfachen Toroidspule gezeigt, für welches eine Vollwellensimulation im Frequenzbereich $f = 1 \,\mathrm{kHz} \dots 1 \,\mathrm{GHz}$ durchgeführt wurde. Die Abmessungen und physikalischen Daten des Toroids sind in Table 2.3 angegeben. Eine Stromquelle der Amplitude $i = 1 \,\mathrm{A}$ dient als Modellanregung, sodass die an der Stromquelle gemessene komplexe Spannung der Impedanz der Anordnung entspricht. Die Modellierung wurde als Vollwellen-Simulation unter Einbezug sämtlicher elektromagnetischer Eigenschaften durchgeführt, d. h. das PEEC Modell enthält Widerstände R(f), Induktivitäten L(f) und kapazitive Kopplungen $P(f) = C(f)^{-1}$. Die Frequenzabhängigkeit der Kopplungsmatrizen berücksichtigt die Retardierung $e^{-2\pi j f |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c}$, wobei der Phasenfaktor aufgrund der endlichen Lichtgeschwindigkeit c zwischen den PEEC-Zellen berechnet wird. Zusätzlich sind die Widerstände und Eigeninduktivitäten aufgrund des Skineffektes frequenzabhängig, wie in Abschnitt 2.3.1 auf Seite 36 und Abschnitt 2.4 diskutiert wurde.

Abbildung 2.15 zeigt die Spannungs-, Strom und H-Feldverteilung bei einer AC Frequenz von 160 kHz als Farbverläufe und Feldvektoren. Die Impedanzergebnisse der Simulation sind in Abbildung 2.16 zusammengefasst, worin die durch verschiedene Effekte dominierten Frequenzabschnitte des Impedanzverlaufes deutlich zu erkennen sind:

0 Hz...8 kHz: Die Toroidspule verhält sich rein resistiv, der Drahtwiderstand ist durch die elektrische Leitfähigkeit σ des Materials, durch

grosser Toroid-Radius R	$30\mathrm{mm}$	
kleiner Toroid-Radius \boldsymbol{r}	$10\mathrm{mm}$	
Drahtdurchmesser d	$2\mathrm{mm}$	
Windungen N	30	
Anzahl Zylinderzellen	500	
Leitfähigkeit σ	$5.7\cdot10^6\mathrm{S/m}$	
Stromquelle $i_{\rm AC}$	1 A	

Tabelle 2.3: Physikalische Eigenschaften des Toroid-Modells aus Abbildung 2.15.







Abb. 2.16: Die simulierte Impedanzkurve $\operatorname{abs}(Z(f))$ des Modells aus Abbildung 2.15, sowie $\Re(Z(f))$, $\Im(Z(f))$ und $\phi(f)$.

den Leiterdurchmesser dund durch die Gesamtlänge des Drahtes festgelegt zu $R=0.101\,\Omega.$

8 kHz...100 MHz: Die Impedanz ist durch das induktive Verhalten der Spule dominiert, aus der Impedanzkurve kann $L = 2.1 \,\mu\text{H}$ abgelesen werden. Eine einfache Abschätzung der Induktivität mittels $L_{\text{tor}} \approx \mu_0 r^2/(2R) = 1.9 \,\mu\text{H}$ ergibt einen ähnlichen Wert. Der Realteil der Impedanz aus Abbildung 2.16 stellt den Verlustanteil dar. Ab einer Frequenz von 20 kHz nimmt der Verlustanteil mit $\Re(Z) \propto \sqrt{f}$ zu, da die Skintiefe kleiner wird als der Leiterdurchmesser. Der Skineffekt hat in diesem Beispiel jedoch kaum einen Einfluss auf die Gesamtinduktivität, da diese hauptsächlich durch das Magnetfeld H innerhalb der Toroidspule, d. h. durch Kopplungsinduktivitäten der Zellen zustande kommt.

 $100 \text{ MHz} \dots 1 \text{ GHz}$: Es bilden sich Resonanzen (Eigenschwinungen) innerhalb des Toroids aus, die erste Resonanzfrequenz ist bei ca. $f_{r1} =$ 100 MHz. Höhere Resonanzen besitzen auf die Leiterlänge verteilt, entsprechend ihrer Ordnung, mehrere Nulldurchgänge der stationären Ströme und Spannungen.

Durch einen Vergleich der retardierten PEEC-Simulation mit einer quasistatischen Näherung $e^{-2\pi j f |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c} \approx 1$ wird der Einfluss der Wel-



Abb. 2.17: Vergleich der retardierten Vollwellenlösung (FW) mit einer quasistatischen Näherung (QS), bei der von einer Lichtgeschwindigkeit $c \to \infty$ ausgegangen wird.

lenlaufzeit auf die Simulationsergebnisse untersucht. Die Simulationergebnisse aus Abbildung 2.17 zeigen die dieselbe Impedanzkurven wie aus Abbildung 2.16, jedoch für den Frequenzbereich $f = 500 \dots 800$ MHz in einer linearen Frequenzachseneinteilung. Zusätzlich ist hier die quasistatische Näherung dargestellt, welche nur eine sehr kleine Abweichung der exakten Lösung zeigt.

Durch die Retardation wird eine zusätzliche Dämpfung – unabhängig von den Widerstandswerten R – zum Modell hinzugefügt, wie ein Vergleich der Kurven $\Re(Z(f))$ in Abbildung 4.20 zeigt. Dies kann durch die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen begründet werden. Im PEEC-Solver führt die Multiplikation der Matrizen j ωL und j $\omega C = j\omega P^{-1}$ (siehe Gleichung (2.15)) mit dem Phasenfaktor $e^{-2\pi j f |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c} = e^{-j\phi}$ zu einer geringen Abnahme der imaginären Induktivitäts- und Kapazitätswerte um den Faktor $\cos(\phi)$. Andererseits erscheint dadurch ein reelwertiger Verlustanteil $\sin(\phi) \cdot C$ und $\sin(\phi) \cdot L$ in der Lösungsmatrix aus 2.15. Somit lässt sich der Strahlungsverlust in PEEC Modellen anschaulich erklären.

Die Strahlungsenergie ist, analog derjenigen eines Herz'schen Dipols $P_{\rm rad} \propto f^4$, spielt jedoch für den in dieser Arbeit betrachteten Frequenzbereich nur eine untergeordnete Rolle. Aus diesem Grund wird folgend ausschliesslich mit der quasistatischen Näherung gearbeitet.

3 Anwendungsbeispiele der PEEC Methode in der Leistungselektronik

3.1 Dynamische Stromaufteilung in einem IGBT Press-Pack-Leistungsmodul

Moderne IGBT-Module erreichen durch die Parallelschaltung mehrerer Halbleiterschalter sehr grosse Nennströme. Für Hochspannungs- und Hochleistungsanwendungen ist das Press-Pack-Leistungsmodul eine interessante Alternative zu herkömmlichen Moduldesigns [44]. Press-Pack-Module sind durch ihre Bauform (Abbildungen 3.1 und 3.2) für eine niederinduktive Serienschaltung innerhalb eines Modulstapels geeignet. Dabei wird auf den Modulstapel ein grosser mechanischer Druck ausgeübt, sodass eine gute und flächenhafte elektrischen Verbindung der Packages garantiert wird, daher stammt auch die Bezeichnung des Moduls.

Durch die Serienschaltung der Module können Sperrspannungen erreicht werden, welche Anwendungen im Bereich der Hochspannungs-Gleichstromübertragung (HVDC, [45]), Multilevel-Konverter oder Leistungs-Pulsanwendungen (Pulsed-Power) zulassen.

Im Folgenden wird mithilfe der PEEC-Methode die modulinterne dynamische Stromverteilung des IGBT-Moduls aus Abbildung 3.2 untersucht [46]. Parasitäre induktive Layouteigenschaften des Leistungsmoduls können während Ein- und Ausschaltvorgängen zu ungleich verteilten Strömen innerhalb des Moduls führen, und damit einhergehend zu einer ungleich verteilten thermischen Belastung der Schalter. Die zur Verfügung stehende Siliziumfläche wird genau dann optimal ausgenutzt, wenn die Ströme zwischen den 12 IGBTs im Modul gleichmässig aufgeteilt werden.



Abb. 3.1: a) Press-Pack IGBT-Modul mit der Gateansteuerschaltung, b) Schaltungsdiagramm, c) Foto des aufgebauten Hardware-Prüfstandes.



Abb. 3.2: a) Explosions ansicht des Press-Pack IGBT-Moduls und dessen internen Aufbaus, b) die Federkontakte der Dioden und Schalter sind bezeichnet bzw. nummeriert. Die Stromanstiegsgeschwindigkeit während eines Schaltvorganges ist in der Grössenordnung von $di/dt = 10 \text{ kA}/\mu \text{s}$, deshalb müssen Skin- und Proximityeffekt in einer Simulation der Stromverteilung berücksichtigt werden. Zusätzlich können Streuinduktiväten und Kopplungen zwischen dem Leistungspfad und der Gatebeschaltung zu einer ungleichmässigen Stromaufteilung führen. Beide Einflüsse werden weiter unten durch Simulationen untersucht.

3.1.1 Layout des Leistungsmoduls

Das Press-Pack Modul ist so dimensioniert, dass der Leistungspfad sehr kurz ist. Daraus ergibt sich eine kleine Induktivität im Kollektor-Emitter-Pfad; eine Explosionszeichnung des Modulinneren ist in Abbildung 3.2 a) gegeben. Im geschlossenen Zustand des Schalters tritt der Strom durch die Kollektor-Basisplatte (unten) hindurch, fliesst durch die Halbleiter und die Press-Pack Spiralfederbolzen, und verlässt das Modul über die Emitterplatte (oben). Abbildung 3.2 b) zeigt die Positionen der 12 IGBTs, die angegebene Nummerierung wird im Folgenden konsistent beibehalten. Die antiparallelen Freilaufdioden werden für die Modellierung nicht beachtet, da sie im Versuchsaufbau nicht verwendet werden.

Der hier betrachtete Versuchsaufbau wurde für eine Pulsed-Power-Anwendung vorgesehen, deshalb wird die Anordnung nur als Stapel zweier Module aufgebaut. Das Hauptziel ist hier die Generierung sehr schneller Stromflanken in der Last. Um die hohen Anforderungen der Stromflanken zu erreichen, müssen die Verbindungen zwischen den Eingangskapazitäten über den Schalter zur Last sorgfältig dimensioniert



Abb. 3.3: Zwei mögliche Modulanordnungen für den Testaufbau.

werden. Abbildung 3.3 a) zeigt die Anordnung der Module zusammen mit einer Aluminiumplatte mit integrierter Wasserkühlung zwischen den Modulen; die Strompfade vom Eingang zum Lastwiderstand sind zusätzlich gekennzeichnet.

Eine alternative Anordnung mit umgekehrtem IGBT-Modul ist in Abbildung 3.3 b) gezeigt. Der Kühlkörper muss bei dieser Anordnung zum untersten Element des Stapels werden; dies ist erforderlich um eine ausreichende Kühlung zu gewährleisten, da die Halbleiterchips auf der Kollektorplatte angebracht sind. Zusätzlich muss die Kühlung dann aus Sicherheitsgründen vom Rest der Schaltung elektrisch isoliert werden. Die Induktivität im Kommutierungspfad ergibt sich näherungsweise aus der Grösse des schraffierten Bereichs A_c in Abbildung 3.3 a) und b). Hieraus erkennt man, dass die Anordnung a) zu grösseren parasitären Induktivitäten und damit zu längeren Anstiegszeiten der Strompulse führt. Zusätzlich ist in a) der Kühlkörper sich schnell ändernden Magnetfeldern ausgesetzt, was zu grossen Wirbelstromverlusten und damit zu zusätzlichen Verlusten im System führt. Aus diesen Gründen wurde die Anordnung, wie sie in Abbildung 3.3 b) gezeigt ist, für den Testaufbau verwendet.

3.1.2 Parasitäre Eigenschaften des Leistungspfades

Im ersten Modellierungsschritt werden als geometriebedingte parasitäre Eigenschaften die Kommutierungsinduktivitäten mit Skin- und Proximity-Effekt betrachtet. Das in der Software GeckoEMC generierte dreidimensionale PEEC-Modell ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Im Modell wurden die Kupfer-Busbars sowie die 12 internen Verbindungen der IGBTs von der Kollektor- zur Emitterplatte realisiert. Zur Vereinfachung wurden die relativ komplizierten Kontaktfedern mit Bolzen durch zylindrische PEEC-Zellen ersetzt. Das Modell berücksichtigt die Leiterwiderstände sowie Skin- und Proximityeffekt durch die Induktivitätsmatrix \boldsymbol{L} als layoutbedingte parasitäre Eigenschaften. Die Kopplung des elektrischen Feldes (\boldsymbol{P} -Matrix) spielt in dieser Anordnung keine Rolle und wird deshalb in der Simulation nicht berücksichtigt.

Das PEEC-Modell beinhaltet kein Halbleitermodell, für diese erste Analyse werden die IGBTs deshalb als ideale Schalter betrachtet, die sich zunächst im ausgeschalteten Zustand befinden. Eine Stromflanke wird durch eine gesteuerte Stromquelle mit einer Anstiegszeit $\tau_{rise} =$ 100 ns auf 1000 A erzwungen. Die entsprechende PEEC-Zeitverlaufs-



Abb. 3.4: Bildschirmfoto der Press-Pack Anordnung in der Software GeckoEMC.



Abb. 3.5: a) Simulierte Stromaufteilung in den IGBT-Schaltern aufgrund der magnetischen Stromanziehung bzw. Abstossung im Strompfad (durchgezogene Linien). Die Symbole stellen die Stromaufteilung dar, welche durch ein Ersatzmodell (Abbildung 3.7) generiert wurden. b) Frequenzbereichssimulation der Stromaufteilung. Aus Symmetriegründen sind in beiden Abbildungen nur 6 der 12 Kurven gezeigt.



Abb. 3.6: Grundriss-Zeichnung des IGBT-Moduls und dessen Verbindungsbeschaltung über Kupfer-Busbars.

simulation der Stromaufteilung ist in Abbildung 3.5 a) gezeigt. Die Simulationsergebnisse zeigen eine starke Asymmetrie während der Schalttransienten: die IGBTs 2, 6, 10 und 12 führen den Hauptstrom während des Einschaltvorgangs, wogegen die anderen Schalter einen kleineren dynamischen Stromverlauf aufweisen. Im stationären Zustand gleicht sich die Stromverteilung aus. Aus Symmetriegründen verhält sich die Stromaufteilung beim Ausschaltvorgang ähnlich.

Da die Simulation ausschliesslich Layouteigenschaften berücksichtigt, ist die gezeigte Asymmetrie über den Modulaufbau und dessen Verbindungen mit den Eingangskapazitäten bzw. der Last über die Kupfer-Busbars zu begründen.

Betrachtet man den Grundriss des Modells in Abbildung 3.6, so kann man die asymmetrische Stromaufteilung durch den Skin- und Proximityeffekt erklären: Bei hohen Frequenzen werden die Wechselströme innerhalb eines Leiters zunehmend an die Oberfläche gedrängt, sobald die Skintiefe (2.50) kleiner als der Leiterdurchmesser wird, siehe auch Gleichung (2.49). Dies liegt daran, dass Ströme derselben Orientierungsrichtung sich im Leiter gegenseitig abstossen (Skineffekt). Andererseits wirken Stromverteilungen in antiparalleler Richtung anziehend aufeinander (Proximityeffekt). Der gestrichtelte Kreis in Abbildung 3.6 markiert zwei unterschiedliche Kategorien von IGBT-Positionen, jeweils ausserhalb und innerhalb des Kreises. Bei schnellen Schaltflanken werden Ströme aufgrund des Skineffektes die Tendenz besitzen, sich auf die äusseren Schalter zu verteilen. Im Grundrissplan sind ausserdem die Busbarverschienungen ausserhalb des Moduls eingezeichnet. Die Busbars in der Abbildung links verbinden das Modul mit den Eingangskapazitäten, rechts befindet sich die Lastverbindung, siehe hierzu auch Abbildung 3.1 a).

Das Magnetfeld der ausgangsseitigen Busbars ist nicht kompensiert, im Gegensatz zur Eingangsseite, wo die Stromführung in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung durch flach aufliegende Kupferplatten realisiert wurde. Hierdurch wird eine zusätzliche Asymmetrie in der Stromverteilung generiert: Aufgrund des Proximityeffektes wird der Strompfad derjenigen Halbleiterschalter bevorzugt, welche sich rechts, in der Nähe der Verschienung befinden; dies sind die IGBTs 2, 6, 10 und 12. Um die Erklärung zur Stromdichteverteilung aus Abbildung 3.5 a) zu verifizieren ist in Abbildung 3.5 b) zusätzlich eine Frequenzbereichssimulation gegeben. Auch hier ist der Hochfrequenzeinfluss auf die Stromverteilung der entsprechenden IGBTs deutlich erkennbar.

3.1.3 Kommutierungspfad Ersatzmodell

Da das vollständige PEEC-Simulationsmodell tausende von Selbstinduktivitäten, Kopplungsinduktivitäten und Widerständen enthält, wird hier ein vereinfachtes Ersatzmodell vorgestellt, welches anschliessend in einen Schaltungssimulator eingebunden werden kann. Der vereinfachte Modellierungsansatz ist in Abbildung 3.7 a) gezeigt. Die gewählte Modelltopologie ist eine quasi-geometrische Repräsentation des Moduls, ähnlich dem eigentlichen PEEC-Ansatz, jedoch mit einer stark reduzierten Anzahl von Komponenten. Die Werte der Kopplungsinduktivitäten aus Abbildung 3.7 wurden zunächst durch die analytische Gleichung [30]

$$M_{km} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot l \cdot \left[\ln\left(\frac{l}{d_{km}} + \sqrt{1 + \frac{l^2}{d_{km}^2}}\right) - \sqrt{1 + \frac{d_{km}^2}{l^2}} + \frac{d_{km}}{l} \right]$$
(3.1)

der Kopplungsinduktivität zweier paralleler Zylinder der Länge l und mit dem Abstand d_{km} berechnet. Damit lässt sich auch die Induktivität zwischen den Kontaktbolzen und den Busbars abschätzen, obwohl diese nicht zylinderförmig sind. Im nächsten Schritt wurden die



Abb. 3.7: Bildschirmfoto der Press-Pack Anordnung in der Software GeckoEMC.

Selbst- und Kopplungsinduktivitäten des Modells so angepasst, dass eine Schaltungssimulation möglichst ähnliche Ergebnisse erzeugt wie die ursprüngliche PEEC-Simulation. Ein Vergleich der beiden Simulationsmodelle ist in Abbildung 3.5 gegeben. Dieses Verfahren ist selbst bei dem kleinen Modell mit 13 Induktivitäten und 78 Kopplungsinduktivitäten sehr mühsam und verdeutlicht die Notwendigkeit einer automatisierten Modellordnungsreduktion, wie sie in Kapitel 5 vorgestellt wird. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie das bis hierher erstellte Modell durch Rückkopplungen zwischen dem Leistungspfad und dem Gatepfad vervollständigt wird, sodass ein Schaltungssimulator in der Lage ist die Stromaufteilung im Modul korrekt zu berechnen.

3.1.4 Rückkopplung zwischen Leistungs- und Gatepfad

Die Leiterbahnen der Gateanschlüsse bestehen aus einer PCB-ähnlichen Lage direkt neben der Emitter-Platte, um die gemeinsame Gate-Emitter-Induktivität so gering wie möglich zu halten. Im untersuchten Testaufbau wird die Gatetreiberschaltung direkt an den Gate-Emitter-Anschluss des Moduls befestigt (siehe Abbildung 3.1 a), sodass durch die Gatetreiberschaltung nicht noch zusätzliche Streuinduktivitäten hinzukommen.

Eine gemeinsame Gate-Emitter-Induktivität führt zu einem verzögerten Schaltvorgang und einer Begrenzung der Schaltgeschwindigkeit, da die Stromflanke d^{i}/dt des Leistungspfades die Gatespannung entspre-



Abb. 3.8: PEEC-Modell der internen Press-Pack Gateverbindungen; der Gatetreiber wird direkt an das Modul angeschlossen. Am Emitteranschluss teilen sich Leistungs- und Gatepfad eine gemeinsame parasitäre Induktivität.

chend der gemeinsamen parasitären Induktivität reduziert. Das Modell aus Abbildung 3.7 a) wurde in 3.7 b) um diese parasitäre Induktivität, die Induktivitäten der einzelnen Gateverbindungen und deren Kopplungen zum Leistungspfad erweitert. Um das Problem der Schaltgeschwindigkeitbegrenzung zu reduzieren, ist in konventionellen Leistungsmodulen die Verwendung eines Hilfsemitters (auxiliary emitter) üblich, welcher unabhängig vom Leistungsemitter zum Halbleiterchip führt. Dadurch lassen sich die Schaltverzögerungen stark reduzieren. Das Press-Pack Leistungsmodul besitzt dagegen nur einen gemeinsamen Emitteranschluss. Für eine korrekte Simulation der Stromaufteilung ist deshalb ein detailliertes Modell nötig, welches die oben beschriebenen Effekte berücksichtigt.

Das PEEC-Modell in Abbildung 3.8 zeigt die internen Gateverbindungen des Leistungsmoduls in der Software GeckoEMC. Für eine erste Analyse des Einflusses des kommutierenden Stromes auf die einzelnen Gates wurde zunächst eine homogenen Stromaufteilung angenommen, d. h. alle Schalter führen jederzeit denselben Laststrom. Die Ergebnisse einer entsprechenden Zeitbereichssimulation sind in Abbildung 3.9 wie-



Abb. 3.9: PEEC-Simulation der induzierten Gatespannungen beim Einschaltvorgang. Der ungleiche Spannungsabfall an den einzelnen Gates führt zu einer nicht ausbalancierten Stromaufteilung im IGBT-Modul.

dergegeben. Die Stromflanke von $i_{\rm tot}=1000\,{\rm A}$ innerhalb von $\tau=0.5\,\mu{\rm s}$ führt über die parasitären Layoutinduktivitäten zum gezeigten Spannungsabfall, welcher, je nach Position und Verdrahtung der 12 Schalter, unterschiedlich gross ist. Die tatsächlich anliegende Gatespannung an jedem Halbleiter berechnet sich damit durch die Summe der Gatetreiberspannung und der gezeigten induzierten Spannung.

Die induzierten Gatespannungen zeigen, dass die Gatespannungen der IGBTs 6 und 10 beim Einschalten am grössten sind, gefolgt von den Transistoren 2 und 12. Dadurch werden diese IGBTs die grösste Verlustleistung beim Einschaltvorgang aufweisen. Man beachte, dass nicht der Spannungsabfall selbst zu einer unsymmetrischen Stromaufteilung führt, sondern die jeweiligen Spannungsunterschiede sind für eine Stromasymmetrie der parallel geschalteten Chips verantwortlich. Ein optimiertes Layout könnte demnach so aussehen, dass der parasitäre Spannungsabfall sehr wohl vorhanden ist, jedoch sollte dieser Abfall für alle Chips derselbe sein.

Die Simulationsergebnisse wurden unter der Annahme einer homogenen Stromaufteilung gewonnen, dabei wurde der Strom in jedem der 12 Schalter durch eine gesteuerte Stromquelle eingeprägt. In der Schaltungssimulation im nächsten Abschnitt wird eine Impedanzmatrix ver-



Abb. 3.10: Simuliertes Schaltverhalten des gesamten Leistungsmoduls unter ohmscher Last.

wendet, welche aus den Simulationsergebnissen aus Abbildung 3.9 generiert wurde. Dabei werden die Verbindungsinduktivitäten zusammen mit der gemeinsamen Gate-Emitter-Induktivität aus der 3D PEEC-Simulation entsprechend Abbildung 3.7 b) berücksichtigt. Auch hier wäre eine automatisierte Modellordnungsreduktion von Vorteil.

3.1.5 Schaltungssimulation der Stromaufteilung

Die oben besprochenen parasitären Verdrahtungseigenschaften werden nun in ein SPICE-ähnliches Gesamtmodell integriert. Zu den parasitären Elementen kommt in dieser Simulation ein detailliertes Schaltermodell hinzu, welches die Halbleitereigenschaften der IGBTs, parasitäre Kapazitäten und den Deaktivierungsstrom (tail current) durch ein Verhaltensmodell einbezieht. Das hiermit simulierte Schaltverhalten des IGBT-Moduls für eine rein ohmsche Last ohne die parasitären Induktivitäten ist in Abbildung 3.10 gezeigt. Die hierzu verwendeten Gesamtwerte von $I_{CE,tot} = 3000$ A und $U_{CE} = 3000$ V werden für die weitere Analyse beibehalten.

Werden die parasitären Kopplungsinduktivitäten in Form einer Impedanzmatrix zur Simulation hinzugefügt, erhält man die Stromaufteilung wie sie in Abbildung 3.11 a)-c) dargestellt ist. Der stationäre Strom ist für alle Chips identisch, da das Schaltermodell für alle 12 IGBTs gleich ist. Eine mögliche Ursache für eine Asymmetrie in der stationären Stromaufteilung wäre gegeben, falls durch Fertigungstoleranzen der Chips abweichende Vorwärtscharakteristiken vorhanden wären. Da in der hier gezeigten Anwendung die Schaltverluste überwiegen, wird



Abb. 3.11: a) Simulierte Stromaufteilung innerhalb des Press-Pack Leistungsmoduls unter ohmscher Last; b) zeigt einen vergrösserten Ausschnitt des Ein- und Ausschaltvorgangs. In c) und d) sind die Verlustleistung und Verlustenergien der einzelnen IGBT Chips dargestellt.

dies nicht weiter berücksichtigt.

Im Gegensatz dazu ist der dynamische Stromverlauf jedoch sehr asymmetrisch aufgeteilt, insbesondere beim Einschaltvorgang, wo die IGBTs 6 und 10 den grössten Strom führen. Beim Ausschaltvorgang schalten die IGBTs 6 und 10 zuerst aus, sodass sich hier die geringsten Verluste ergeben.

Abbildung 3.11 mag zunächst den Eindruck erwecken, dass die einzelnen Schalter sehr unterschiedlich belastet werden. Jedoch sind hierbei zwei Punkte zu beachten:

- Die verschiedenen Schaltverluste beim Ein- und Ausschalten gleichen sich teilweise aus. Betrachtet man die Summe aus Ein- und Ausschaltverlusten, ergibt sich ein ausgeglicheneres Bild als in Abbildung 3.11 e).
- Durch eine ungleich verteilte Verlustleistung erwärmen sich die Chips unterschiedlich. Dies hat jedoch eine Rückwirkung auf die Leit- und Schaltverluste, sodass sich durch positive Temperaturkoeffizienten die Temperaturen der IGBTs ausgleichen. Um das tatsächliche Verhalten der Chips im Detail zu simulieren, wäre eine Software nötig, die elektromagnetische, thermische und Bauelementeeigenschaften berücksichtigt und miteinander verkoppelt.

3.2 Simulation einer Rogowski-Spule zur Strommessung

In der Leistungselektronik ist für die Messung grosser Stromflanken di/dthäufig ein Rogowski Messwandler im Einsatz [47]. Dieser Sensor bietet den Vorteil einer galvanischen Trennung zwischen dem Leiter und der Messspule. Ausserdem können mit Rogowski-Spulen Stromänderungen bis zu sehr grossen Strömen ohne Sättigungseffekte gemessen werden, da kein permeabler Kern vorhanden ist. Dies macht die Rogowski-Spule insbesondere für Pulsed-Power-Anwendungen interessant, da hier sehr schnelle und hohe Strompulse bei hohen Spannungen gemessen werden müssen.

In [48] wurden Rowogski-Spulen dazu verwendet, um Ströme in IGBT Modulen zu messen. In diesem Abschnitt wird das Design einer Rogowski-Spule mithilfe der PEEC Methode gezeigt, die zur Strommessung einer Press-Pack-Anordnung entsprechend Abbildung 3.12, ähnlich derjeni-



Abb. 3.12: a) zeigt den Aufbau des Press-Pack Stapels, in welchem gepulste Ströme durch die Rogowski-Spule in b) gemessen werden sollen.

gen aus dem vorherigen Abschnitt, eingesetzt wird [47]. Um das elektromagnetische Verhalten des Spulendesign vorherzusagen könnte man verschiedene numerische Methoden einsetzen, z.B. FDM-Simulationen. Es hat sich jedoch gezeigt, dass dann der Rechenaufwand für eine komplexe Rogowski-Spule im Bereich von Tagen liegt. Die PEEC-Methode ist deshalb ideal für diese Designaufgabe geeignet, da sich der Rechenaufwand auf ca. 15 Minuten beschränkt [49]. Die relevanten Parameter für das Design einer Rogowski- Messpule sind die Messbandbreite, die Messsensitivität sowie die Anfälligkeit gegenüber störender magnetischer Felder von Strömen, die ausserhalb der Spulen fliessen. Genau diese Parameter sollen zunächst für verschiedene Spulengeometrien mit der PEEC-Software GeckoEMC berechnet werden. Nachdem das beste Design gefunden wurde, wird ein Vergleich der Messergebnisse einer als Hardware realisierten Spule mit den Simulationsergebnissen vorgestellt.

3.2.1 Rogowski-Spulen Ersatzmodell

Ein vereinfachtes Ersatzmodell einer Rogowski-Spule ist in Abbildung 3.13 dargestellt. Der zu messende Strom ist über eine Layoutinduktivität mit zur Spule magnetisch gekoppelt. Das in L_{Rog} induzierte Signal wird am Ausgang der Spule gemessen. Die Messensitivität der Anordnung ist über die Kopplungsinduktivität M gegeben.

Das Modell ist nur bis zur ersten Resonanzfrequenz gültig, da für höhere Resonanzen die Kapazitäten und Induktivitäten zwischen den einzelnen Windungen im Detail modelliert werden müssten. Der Messbe-



Abb. 3.13: Vereinfachtes Ersatzschaltbild einer Rogowski-Spule, welches bis zur ersten Resonanzfrequenz gültig ist. R_d stellt einen externen Dämpfungswiderstand dar, alle anderen Komponenten sind (parasitäre) Elemente der Rogowski-Spule.

reich der Spule ist ohnehin durch die erste Resonanzfrequenz beschränkt, deshalb sollte dieses einfache Modell genügen.

Die Übertragungsfunktion der Ersatzschaltung hat ein Resonanzmaximum bei der Kreisfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{L_{\text{Rog}}C}$. Um ein starkes Überschwingen bei der Messung von Pulsströmen zu vermeiden, wurde der externe Dämpfungswiderstand R_d zur Schaltung hinzugefügt [47]. Da die gemessene Spannung am Ausgang proportional zu d^i/dt ist, kann das ursprüngliche Signal durch eine Integration zurückgewonnen werden.

Im Folgenden werden durch PEEC-Simulationen drei verschiedene Windungsanordnungen auf ihre Brauchbarkeit für eine Strommessung des Press-Pack Stapels untersucht. Die jeweiligen Anordnungen sind in Abbildung 3.14 a)-c) gezeigt. Ströme, welche nicht von der Gesamtwindung der Rogowski-Spule eingeschlossen werden, haben bei der einfachen Windungsanordnung aus 3.14 a) einen relativ grossen Störeinfluss auf die Strommessung, da hier Magnetfeldlinien bzw. Feldänderungen innerhalb der gesamten rechteckigen Fläche der Spule detektiert werden. Deshalb wird vorteilhaft eine Spulengeometrie, wie in 3.14 b) und c) gezeigt, verwendet werden, um die Störanfälligkeit zu minimieren [49, 47].

3.2.2 Impedanz der Rogowski-Spule

Um die Resonanzfrequenz der Spulen korrekt zu berechnen, muss das dielektrische Material des PCBs in der Simulation berücksichtigt werden. Prinzipiell ist dies durch dielektrische PEEC-Zellen möglich [50].



Abb. 3.14: Die verwendeten Windungsgeometrien der Rogowski-Spulen: a) ohne Störfeldkomensierung, b) einfache Kompensationswindung, c) bifilare vorwärts/rückwärts-Windung.

Dadurch würde sich aber die Simulationszeit unnötig vergrössern, da die Anzahl der benötigten Zellen stark ansteigt. Deshalb wird hier von einem Modell ausgegangen, in dem der komplette Raum von einem Dielektrikum mit der globalen Dielektrizitätszahl $\epsilon_{\rm eff}$ ausgefüllt ist, d. h. die Kapazitätsmatrix C wird in der PEEC-Simulation mit $\epsilon_{\rm eff}$ multipliziert.

Die PCB-Pfade der Rogowski-Spulen können als planare Bandleitungen aufgefasst werden. Hierfür wird in [51] die Berechnung der globalen Dielektrizitätszahl zu

$$\epsilon_{\rm eff} = 1 + q(\epsilon_{\rm r} - 1) \tag{3.2}$$

vorgeschlagen, wobei $\epsilon_{\rm r}$ die reale Dielektrizitätszahl des PCBs ist und q der Füllfaktor des Dielektrikums. Für ein Dielektrikum, das einen Halbraum ausfüllt, ist ein Füllfaktor von q = 0.5 zu wählen. Damit ergibt sich für das FR4-Material des PCBs ($\epsilon_{\rm r} = 4.5$) eine globale Dielektrizitätszahl von $\epsilon_{\rm eff} = 2.75$.

Die daraus resultierenden Induktivitäten und Resonanzfrequenzen der drei Windungsanordnungen a)-c) sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst, alle drei Induktivitätswerte sind vergleichbar gross. Zur Verifikation der Simulationen wurden Messergebnisse eines Prototypen von b) in die Tabelle eingetragen, welche bis auf wenige % Abweichung mit den Simulationsergebnissen übereinstimmen. Ein Vergleich der simulierten und gemessenen Impedanzverläufe der Anordnung b) ist in Abbildung 3.15 gegeben; über einen weiten Frequenzbereich kann der Im-

Windungs-	Induktivität H	Simulation	Messung	Messung
geometrie	L in μH	$f_{\rm res}$ in MHz	L in $\mu {\rm H}$	$f_{\rm res}$ in MHz
a)	2.11	50.0	-	-
b)	2.37	30.0	2.34	28.2
c)	1.85	31.3	-	-

Tabelle 3.1: Vergleich der simulierten Induktivitäten und Resonanzfrequenzen der Windungsführungen aus Abbildung 3.14.

pedanzverlauf korrekt wiedergegeben werden. Die Abweichungen der Messergebnisse von den simulierten Daten kann mehrere mögliche Ursachen haben:

- Der Skineffekt wurde in der Simulation nicht berücksichtigt, da die Windungen als einzelne PEEC-Zellen implementiert wurden.
- Das Modell beinhaltet eine globale Dielektrizitätszahl, was insbesondere für hohe Frequenzen nur als grobe Näherung aufgefasst werden kann. Ausserdem wurde die Frequenzabhängigkeit des FR4-Materials nicht berücksichtigt.
- Die endliche Lichtgeschwindigkeit könnte bei hohen Frequenzen einen Einfluss auf die Ergebnisse haben, da die Spule eine relativ grosse räumliche Abmessung hat. Durch das Dielektrikum wird die Wellenlänge im Material zusätzlich verkleinert.

Da die Rogowski-Spule lediglich für Messfrequenzen unterhalb der ersten Resonanzfrequenz verwendet wird, spielt die Abweichung bei hohen Frequenzen für die Praxis jedoch keine grosse Rolle.

3.2.3 Sensitivität der Strommessung

Um die am Spulenausgang detektierbare Spannung aufgrund von Stromänderungen im Press-Pack Modul zu modellieren, wurde die Rogowski-Spule 3.14 b) mitsamt dem Press-Pack Testaufbau in einem PEEC-Modell implementiert, siehe Abbildung 3.16. Hieraus kann eine Aussage über das zu erwartende Messverhalten und über die Sensitivität der Messanordnung gewonnen werden. Da der Testaufbau so ausgelegt ist, dass er eine möglichst geringe Kommutierungsinduktivität besitzt, befinden sich die Kupfer-Busbars relativ nahe an der Messspule. Dadurch können kapazitive Effekte zwischen den Busbars und der Rogowski-



Abb. 3.15: Vergleich von Berechnung und Messung des frequenzabhängigen Impedanzverlaufs der Rogowski-Spule aus Abbildung 3.14 b).



Abb. 3.16: GeckoEMC-Modell des Messaufbaus mit dem Press-Pack IGBT Modul, Busbars und der Rogowski-Spule. Die Stromrichtung ist rot strichliert eingezeichnet.



Abb. 3.17: Vergleich der Messübertragungsfunktionen: ideale Rogowski-Spule (grün), Ersatzschaltbild aus Abbildung 3.13 und einer 3D-PEEC-Feldsimulation (rot).

Spule nicht mehr vernachlässigt werden. Durch die Nähe der Busbars ergibt sich eine simulierte Kopplungsinduktivität von nur M = 3.8 nH, die um ca. 10 % Prozent grösser ist, als wenn ein unendlich langer Leiter die Spule durchdringen würde. Ein Vergleich der Messübertragungsfunktionen G einer idealen Kopplungsinduktivität, dem Ersatzschaltbild und der 3D-Feldsimulation ist in Abbildung 3.17 gegeben. Der externe Dämpfungswiderstand wurde hierbei so eingestellt das eine kritische Dämpfung vorliegt. Bis zu einer Frequenz von 35 MHz ist das Modell des Ersatzschaltbildes ausreichend genau.

Um die Simulationsergebnisse zu verifizieren wurde die Anordnung mit einem Puls von 400 A und mit einer Pulslänge von 4 μ s belastet. Der Strompuls wurde mit einer kommerziell erhältlichen Rogowski-Spule (PEM CWT 60R) gemessen. Abbildung 3.18 zeigt das Ergebnis zusammen mit dem Kurvenverlauf, der sich aufgrund der PEEC-Simu-



Abb. 3.18: PEEC-Simulation (rot) und als Vergleich Messergebnisse (blau) eines 400 A Strompulses durch die Rogowski-Spule.

lations
resultate ergibt. Hierbei keine PEEC-Simuation im Zeitbereich durchgeführt, sondern lediglich die Ergebnisse der Messübertragungs-
funktion $G_{\rm coil,peec}$ aus Abbildung 3.17 in den Zeitbereich transformiert
 und ein entsprechender Eingangspuls verwendet. Beide Kurvenverläufe stimmen relativ genau überein, am Ende des Pulses ist nur eine Abweichung von 2 % zu beobachten. Der Stromverlauf der PEM-Messung zeigt einen negativen Strom bei Pulsbeginn, was durch die parasitäre Kapazität zwischen Last und Spule erklärt werden könnte. Die Bandbreite des kommerziellen Sensors ist mit 16 MHz geringer als diejenige der PCB-Rogowski-Spule. Dies könnte eine Erklärung für die unterschiedlichen Oszillationen zu Beginn und am Ende des Strompulses sein.

3.3 Verlustberechnung für Induktivitäten mit Folienwicklungen

Als letztes Anwendungsbeispiel der PEEC Methode wird hier die Verlustmodellierung von Induktivitäten ausgeführt. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist hierfür eine Modifikation des PEEC-Verfahrens nötig, damit eine zweidimensionale (2D) Approximation sinnvoll verwendet werden kann.



Abb. 3.19: a) Typische Anordnung von Induktivitäten mit Rundleitern und b) schematisches Schnittbild. Mit freundlicher Genehmigung aus [52].

3.3.1 Übersicht zur Verlustberechnung von Induktivitäten mit Rundleitern

Nahezu jede leistungselektronische Schaltung benötigt für den Betrieb magnetische Energiespeicher. Eine typische Bauform von Induktivitäten mit Rundleitern ist in Abbildung 3.19 gezeigt. Neben Halbleiterverlusten haben die Verluste der induktiven Bauteilen einen wesentlichen Anteil an der gesamten Abwärme leistungselektronischer Konverter [53]. Verluste in magnetischen Komponenten unterteilen sich in Kern- und Wicklungsverluste. Letztere werden in diesem Abschnitt für Folienleiter mit Hilfe der PEEC-Methode berechnet.

Eine gute Übersicht zur Modellierung von Induktivitäten findet man in [54, 55]. Dort werden die Kernverluste mittels eines erweiterten Steinmetz-Ansatzes berechnet. Zur Berücksichtigung der frequenzabhängigen Wicklungsverluste aufgrund des Skin- und Proximity-Effekts muss die magnetische Feldstärke im Wicklungsfenster bekannt sein. Hierfür wären zunächst FEM-Solver ideal geeignet, da mittels FEM sowohl der Einfluss der Windungen als auch des permeablen Kernmaterials berücksichtigt wird. Die Ergebnisse werden für jede Frequenz separat berechnet und schliesslich aufsummiert. Da für eine Verlust- oder Volumenoptimierung von Induktivitäten die Simulation zahlreicher Modellvarianten benötigt wird, ist der detaillierte FDM-Ansatz jedoch zu zeitaufwändig. Die Berechnung sollte innerhalb eines Sekundenbruchteils bis zu maxi-



Abb. 3.20: Ansicht einer Induktivität von oben. Die Geometrie wird in verschiedene Abschnitte unterteilt, in welchen zweidimensionale Näherungen für die Feldberechnung erzeugt werden [55].

mal einer Sekunde durchgeführt sein, damit die gesamte Simulationszeit nicht zu gross wird.

Die Feld- und Verlustsimulation wird deshalb zur schnelleren Berechnung mit einem anderen Verfahren durchgeführt [54, 56, 52]. Zunächst kann die dreidimensionale Geometrie der Induktivität in guter Näherung durch zwei 2D Berechnungen approximiert werden [56], dies ist in Abbildung 3.20 dargestellt. Jeder Abschnitt wird in der Feldberechnung als zweidimensionale Anordnung betrachtet. Damit werden die Leiter in die jeweilige Richtung als unendlich lang angenommen. Anstatt effektiver Widerstände R(f) erhält man als Lösung des Modells einen effektiven Widerstandsbelag R'(f), welcher schliesslich auf die tatsächlichen Längen der dreidimensionalen Geometrie skaliert wird. Da die Windungen in den beiden gezeigten Abschnitten orthogonal zueinander sind, können die jeweils erzeugten Magnetfelder und die daraus resultierenden Skin- und Proximity-Verluste unabhängig voneinander berechnet werden.

Der Einfluss des Luftspalts auf die Feldverteilung im Wicklungsfenster wird durch eine Ersatzwindung repräsentiert, deren Strom mit der Annahme $\mu_r \to \infty$ mittels $i_{\text{ers}} = N \cdot i_{\text{w}}$ berechnet wird, wobei N die Windungszahl und i_{w} der Windungsstrom ist, siehe Abbildung 3.21.

Der Einfluss des permeablen Kernmaterials wird schliesslich mithilfe der Spiegelungsmethode berechnet, siehe hierzu auch [56] und Abbildung 3.22. Die magnetischen Feldlinien treten an der Grenzfläche zum Kern senkrecht in das Kernmaterial ein. Durch eine einfache Spiegelung



Abb. 3.21: Modellierung eines Luftspalts im Wicklungsfenster durch einen stromdurchflossenen Ersatzleiter [55].



Abb. 3.22: Mit Hilfe des Spiegelverfahrens kann der Einfluss eines hochpermablen Kerns auf die Feldverteilung durch eine mehrfache Spiegelung der Geometrie modelliert werden [55].



Abb. 3.23: Illustration einer Induktivität mit Folienwindungen. Das Streufeld des Luftspalts erzeugt zusätzliche Verluste durch Skin- und Proximityeffekt.

der Leitergeometrie an der Grenzfläche heben sich die Tangentialkomponenten der Feldlinien des ursprünglichen Leiters und des Spiegelbildes gegenseitig auf.

Da das Wicklungsfenster von allen Seiten durch hochpermeables Material begrenzt ist, müssen die Spiegelbilder selbst wieder bei der Spiegelung mit berücksichtigt werden. Deshalb sollte die gesamte Zeichenebene aus Abbildung 3.22 durch Spiegelbilder des Kerns gefüllt werden. In der Praxis hat sich jedoch gezeigt [56, 55], dass 3 bis 4 Spiegelungen in jeder Richtung ausreichend sind: da sich der Abstand zusätzlicher Spiegelbilder vom Original immer weiter erhöht, ist der zusätzliche Feldeinfluss weit entfernter Leiter vernachlässigbar. Für die Berechnung der Verluste in Abschnitt 2 aus Abbildung 3.20 ist lediglich eine einzelne Spiegelebene an der Grenzfläche erforderlich.

Für Rundleiter sowie Litzendrähte existieren analytische Berechnungsformeln, sodass bei bekannter Feldverteilung die Verluste mit geringem Aufwand berechnet werden können. Im Gegensatz hierzu ist für Induktivitäten mit Folienleiter und Luftspalt (siehe Abbildung 3.23) keine analytische Lösung zur Berechnung der Skin- und Proximityverluste bekannt. Bei fehlendem Luftspalt, d.h. im Wesentlichen für Transformatoren, kann eine analytische Näherung zur Verlustberechnung benützt werden, wie sie von Dowell in [57] vorgeschlagen und in [58, 53, 55] verwendet wurde. Die Stromverteilung innerhalb eines flächigen Leiters hängt sowohl vom Feld sämtlicher Windungen ab, sowie vom hochpermeablen Kern und der Position des Luftspalts. Dieser führt zu Feldkomponenten, die die Folienleiter durchdringen, weshalb der Ansatz aus [57] nicht anwendbar ist. Deshalb wird im Folgenden ein zweidimensionaler PEEC-Ansatz zur Verlustberechung von Wicklungsverlusten in Folienleitern abgeleitet.

3.3.2 Die PEEC-Methode in zwei Dimensionen

Um PEEC auf 2D Geometrien zu verwenden, sind zunächst einige mathematische Umformungen nötig. Die Zweidimensionalität ist nicht zu verwechseln mit einer flächigen Modellierung, wie sie zum Beispiel für PCBs verwendet wird. Für flache Modelle ist lediglich die z-Dimension aller Leiter identisch oder im Falle mehrlagiger PCBs auf mehrere Schichten verteilt. Die Leiterbahnen sind dabei in x-y-Richtung angeordnet. Im Gegensatz dazu wird in diesem Abschnitt die Stromrichtung in z-Richung angenommen, alle Leiter haben eine unendliche Ausdehnung. Die Simulationsergebnisse werden damit zu Stromdichten j = i/A, Widerstands- und Induktivitätsbelägen. Um einen Bezug zu real auftretenden Grössen herzustellen, müssen die Ergebnisse wieder mit einer Länge in z-Richtung verrechnet werden.

Das grundsätzliche Problem weshalb PEEC nicht ohne Weiteres für zweidimensionale Geometrien verwendet werden kann, ist, dass eine Selbstinduktivität bei unendlich langen Leitern gegen ∞ strebt (siehe Gleichung (2.82) auf Seite 63). Auch nach einer Normierung der Induktivität pro Länge l divergiert die Selbstinduktivität mit $L_p \propto \ln l$ gegen ∞ . Anschaulich ist dies damit zu erklären, dass die magnetische Feldstärke eines unendlich langen Leiters mit $H \propto 1/r$ abfällt. Die gesamte Feldenergie im Raum erhält man durch die Integration $E \propto \lim_{r \to \infty} \int_{r=r_0}^{r} 1/r' dr'$; dieser Ausdruck divergiert jedoch.

Diese Tatsache widerspricht aber der ersten Intuition, dass PEEC für die hier besprochene Vereinfachung für zwei Dimensionen anwendbar sein sollte. Die Problemlösung wird weiter unten durch Aufstellen der PEEC Netzwerkgleichungen klar. Im dreidimensionalen Fall können die Matrixeinträge Lp_{km} aus Gleichung (2.58) mit dem Integrationskern

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$
(3.3)

berechnet werden. Für die Kopplungsinduktivität zweier paralleler Stromfäden existiert die Näherungsformel

$$Lp = \frac{\mu_0 \cdot l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{d} - 1 \right), \ l \ll d.$$

$$(3.4)$$

Hierbei ist l die Ausdehnung in z-Richtung und d der Abstand der Stromfäden. Da für den betrachteten Fall $l \to \infty$ strebt, ist Gleichung (3.4) sogar exakt. Ausserdem wird mit (3.4) sofort einsichtig, dass die Einträge der Induktivitätsmatrix L im Grenzfall divergieren. Mit der Herleitung aus Abschnitt 2.3.5 wird deutlich, dass für die Berechnung der partiellen Induktivitäten in 2D mittels doppelter Integration über zwei Flächen der Integrationskern in Gleichung (2.63) mit dem Ausdruck

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{2 \cdot l}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{4\pi} \left[\lim_{l \to \infty} \ln (2l) - \ln |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \right] \quad (3.5)$$

ersetzt wird. Die Ortsvektoren r, r' haben dabei keine z-Komponente. Der problematische Term in Gleichung (3.5) ist der Logarithmus $\ln(2l)$, welcher zu jeder Induktivitätsberechnung beiträgt. Im Folgenden wird aber gezeigt, dass für die Lösung der 2D-PEEC Systemmatrizen eine beliebige Konstante¹ zur Induktivitätsmatrix addiert werden kann, ohne dass sich die resultierende Stromdichteverteilung ändert. Damit sind die Systemgleichungen auch für 2D-Probleme lösbar, indem lediglich der konstante Term $\ln (2l)/(4\pi)$ von der Induktivitätsmatrix abgezogen wird². Die herkömmlichen analytischen Formeln zur Berechnung partieller Induktivitäten aus Abschnitt 2.3.2 und Anhang A können damit weiterhin verwendet werden. Mit diesem Ansatz kann eine räumliche Ausdehnung l in z-Richtung gewählt werden, die im Vergleich zur Modellausdehung in x-y-Richtung gross ist. Die Werte der Induktivitätsmatrix müssen nach deren Berechnung über die analytischen Formeln durch die frei gewählte Länge l dividiert werden. Es wäre sicherlich auch möglich die analytischen Formeln soweit zu modifizieren, dass der Grenzwert mit $l \to \infty$ ohne den Umweg über den frei wählbaren Parameter l berechnet wird. Da die entsprechenden Formeln in den Funktionen für die dreidimensionale PEEC-Simulation ohnehin implementiert sind, wurde hier darauf verzichtet.

 $^{^1 \}mathrm{d.h.}$ vollbesetzte Matrizen bei denen sämtliche Matrixe
inträge $\ln{(2l)}/(4\pi)$ sind.

²Da diese Konstante für die Lösung keine Rolle spielt könnte man auf die Subtraktion auch verzichten. Es hat sich jedoch gezeigt, dass sich dann bei der Lösung der Systemmatrix bei sehr grossen Werte für l auch grosse Rundungsfehler ergeben.

Für die vereinfachte Darstellung der Systemmatrix werden kapazitive Kopplungen nicht betrachtet, sondern nur der DC-Widerstand der Leitergeometrie sowie induktive Kopplungen berücksichtigt. Die komplexen Systemgleichungen im modifizierten Knotenpotentialverfahren (MNA) lauten damit aus Gleichung (2.15) vereinfacht

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{\mathcal{A}} \\ -\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}' + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{L}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{i}_{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$
(3.6)

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde hier die MNA gegenüber dem Knotenpotentialverfahren bevorzugt. Zur Unterscheidung zwischen 2Dund 3D-Modellen werden hier die Widerstandsmatrix und Induktivitätsmatrix als \mathbf{R}' respektive \mathbf{L}' bezeichet. Die Grösse der MNA-Matrix ist gegenüber dem Knotenpotentialverfahren lediglich um die Anzahl der eingeprägten Ströme, d.h. der Windungszahl N vergrössert. Im Vergleich zur Gesamtzahl der Zellen ist dies ein geringer Mehraufwand. Die einzelnen Leiter im Modell werden durch eine Gruppe von PEEC-Zellen dargestellt. Der Gesamtstrom in jedem der k Leiter, welcher aus mehreren n Zellen besteht, ist über den Quellstromvektor

$$\mathbf{i}_{s} = (i_{1}, -i_{1}, i_{2}, -i_{2} \dots i_{k}, -i_{k})^{\mathrm{T}}$$
(3.7)

eingeprägt. Im Falle einer einzigen Wicklung mit mehreren Windungen sind sämtliche Stromvektoreinträge $i_k = \pm i_w$ identisch, abgesehen vom Wert $i_{\rm ers} = N \cdot i_w$, welcher das Feld des Luftspalts darstellt. Die Matrix **B** dient ausschliesslich dazu, dass die Systemmatrix nicht singulär ist. Die Potentiale aller separaten Leiter, d.h. einzelner Windungen, sind unabhängig voneinander und damit wäre die Systemmatrix singulär. Durch die Wahl eines Bezugspotentials in jedem Leiter wird dieser Umstand beseitigt. So kann

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{cases} \text{Leiter 1} \\ \text{Leiter 2} \end{cases}$$
(3.8)

gewählt werden, damit der Ausgangspunkt jeder Windung, die sich z. B. bei $z = +\infty$ befindet, auf Nullpotential liegt. Prinzipiell könnte jede Zeile und Spalte in der Systemmatrix, deren Eintrag eine 1 auf der Diagonalen von B_{ii} enthält, aus der Systemmatrix gelöscht werden, da das dazugehörige Potential ohnehin auf 0 festgelegt ist. Damit die MNA-Formulierung lesbar und verständlich bleibt, werden hier die entsprechenden Zeilen und Spalten beibehalten.

Die Inzidenzmatrix \mathcal{A} ist einfach aufzustellen, und besteht für einen Leiter der Zellenanzahl n in jeder Zeile aus den Einträgen +1 und -1:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & \cdot \\ & & & & \ddots & & \ddots \end{pmatrix} .$$
(3.9)

Addiert man nun zu der Induktivitätsmatrix L' in Gleichung (3.6) eine beliebige konstante Matrix C mit $c_{ij} = c$ hinzu, so erkennt man in

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{\mathcal{A}} \\ -\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{R}' + j\omega \left(\boldsymbol{L}' + \boldsymbol{C}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{i}_{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

dass dies einer Verschiebung sämtlicher Lösungspotentiale v um den Betrag j ωc entspricht. Da über die Inzidenzmatrix \mathcal{A} mit den Einträgen +1, -1 nur Potentialdifferenzen zur Stromverteilung innerhalb eines Leiters beitragen, hat die Addition der Konstanten C keinerlei Einfluss auf das Ergebnis i der Stromverteilung.

3.3.3 Anwendung der Spiegelungsmethode auf PEEC-Modelle zur Berechnung von Wicklungsverlusten

Die Spiegelmethode, wie sie auf Seite 92 für Rundleiter beschrieben wurde, lässt sich ohne Weiteres auf den PEEC-Ansatz anwenden. Um ein senkrechtes Eindringen der Feldlinien in das Gebiet hoher Permeabilität sicherzustellen, ist ausschliesslich eine Erweiterung der Matrix der partiellen Induktivitäten L' nötig. Die Stromverteilung innerhalb gespiegelter Leiter sind identisch mit derjenigen im ursprünglichen Leiter; damit werden keine neuen Variablen in die Systemmatrix eingeführt. Im Vergleich zu einem Modell ohne Spiegelungen bleibt der Rechenaufwand zur Lösung des Gleichungssystems identisch; einzig die Berechnung der


Abb. 3.24: Anwendung der Spiegelmethode am Beispiel zweier PEEC-Zellen: Zu den ursprünglichen partiellen Induktivitäten Lp_{mm} , Lp_{kk} und Lp_{km} werden die Kopplungsinduktivitäten der Spiegelbilder addiert.

erweiterten Induktivitätsmatrix $L^* = L' + L^s$ führt hier zu einem Mehraufwand. Die durch die Spiegelbilder der Zellen erforderlichen zusätzlichen Induktivitätswerte sind in Abbildung 3.24 anhand eines Beispiels mit zwei Originalzellen und einer einfachen Spiegelung gezeigt. Zu der ursprünglichen Induktivitätsmatrix werden die Kopplungsinduktivitäten zwischen allen Spiegelbildern und sämtlichen Originalzellen addiert

$$\boldsymbol{L}^* = \begin{pmatrix} Lp_{kk} & Lp_{km} \\ Lp_{km} & Lp_{mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Lp_{kk'} & Lp_{km'} \\ Lp_{km'} & Lp_{mm'} \end{pmatrix}.$$
 (3.11)

Selbst bei einer grösseren Anzahl an Spiegelungen hält sich der Berechnungsaufwand in Grenzen. Jeder Matrixeintrag besteht nun zwar aus einer Summe von partiellen Induktivitäten; mit einer zunehmenden Anzahl an Spiegelungen nimmt aber auch der Abstand zwischen abgebildeten Zellen und den Originalen zu, sodass die Näherungsformel (3.4) verwendet werden kann, anstatt die aufwändigeren exakten Gleichungen oder gar Integrationen zu gebrauchen. Schliesslich können bei sehr grossen Abständen zwischen den Original-Windungen und Spiegelbildern



Abb. 3.25: Farbige Darstellung der Verteilung von Wicklungsverlusten einer Induktivität mit Folienwicklungen und Luftspalt. Die Berechnung erfolgte über einen 2D-PEEC-Ansatz und mithilfe der Spiegelungsmethode.

Anzahl Windungen	n = 21
PEEC Zellen pro Windung	40
Material: Kupfer	$\sigma = 5.7 \cdot 10^6 {}^{S}\!/\mathrm{M}$
Windungsabmessung	$t = 600 \mu \mathrm{m}, w = 38 \mathrm{mm}$
Geometrie Wicklungsfenster	$t = 25 \mathrm{mm}, w = 41 \mathrm{mm}$
Simulationsfrequenz	$f = 100 \mathrm{Hz}$
Strom pro Windung	$i = i_{\rm tot}/n = 1 \mathrm{A}$
Ersatzstrom des Luftspalts	$i_{\rm ers} = n \cdot i = 21 \mathrm{A}$

Tabelle 3.2: Geometrische und physikalische Modellparameter der folgenden 2D-PEEC Beispielmodelle (siehe Abbildungen 3.25 und 3.26).

alle Windungen zu einer einzelnen PEEC-Zelle zusammengefasst werden. Diese Vereinfachung ist in Abbildung 3.25 dargestellt. Hier verlaufen 20 Folienwindungen in vertikaler Richtung, die Stromrichtung steht orthogonal zur Zeichenebene. Jede Windung ist in 40 PEEC-Zellen diskretisiert. Der Luftspalt ist als kleines Rechteck links neben dem Wicklungsfenster sichtbar. Das Wicklungsfenster wurde in alle Richtungen mehrmals nach aussen gespiegelt. Die äusserste Reihe der Spiegelbilder ist bereits weit genug vom Original entfernt, sodass die einzelnen Zellen einer Windung nicht mehr aufgelöst werden müssen, sondern als eine einzige stromführende Zelle betrachtet werden können.

Das Modell aus Abbildung 3.25 wird auf einem handelsüblichen Computer innerhalb einer Sekunde berechnet; die vorgestellte Simulationsmethode ist somit auch für Optimierungen von Induktivitäten gut geeignet. Zusätzlich gibt es noch einige Optimierungsmöglichkeiten, die hier noch nicht implementiert wurden:

- Das Modell aus Abbildung 3.25 ist horizontal achsensymmetrisch. Mit dieser Eigenschaft lässt sich die Systemmatrixgrösse halbieren.
- Momentan ist für Modelle mit n < 10'000 PEEC-Zellen ist das Aufstellen der erweiterten Induktivitätsmatrix der grösste Rechenaufwand. Da die Matrixeinträge unabhängig voneinander berechnet werden können, liessen sich hier die Vorteile von Mehrkern-CPUs moderner Rechner ideal ausnutzen.

- Würde man Induktivitäten mit einer sehr grossen Windungszahl simulieren, dann unterscheidet sich die Feld- und Stromverteilung zwischen benachbarten Folienwindungen kaum. Deshalb könnten benachbarte Folien im Modell zu Gruppen zusammengefasst werden, sodass sich auch Modelle mit sehr grosser Windungszahl noch schnell lösen lassen.
- Die Induktivitätsberechnung beruht hier noch auf der Annahme, dass die z-Dimension sehr gross ist im Vergleich zur Modell-Ausdehnung in x-y-Richtung. Demnach kann zur Berechnung der Induktivitätsmatrix auch eine analytisch exakte Formel gefunden werden, welche über eine doppelte Flächenintegration über den Integrationskern (3.4) hergeleitet wird. Dadurch kann zum Einen die Berechnung der Induktivitätsmatrix beschleunigt werden. Ausserdem würde hierdurch die Lösung des Modells numerisch stabiler werden, da Rundungsfehler aufgrund der hier beliebig gewählten grossen Ausdehung in z-Richtung entfallen.

Der Windungsabschnitt ausserhalb des Wicklungsfensters benötigt nur eine einzige Spiegelung; eine ortsabhängige Stromdichteverteilung wird als Beispiel in den Abbildungen 3.26a-c) gezeigt; die entsprechenden Modellparameter können Tabelle 3.3.3 entnommen werden. Die komplexen Ströme und Spannungen in jeder Simulationszelle erhält man direkt als Lösung der Systemmatrix. Über den DC-Widerstand jeder Zelle lässt sich daraus eine Verlustleistungsdichte oder auch ein Verhältnis zwischen AC- und DC-Widerstand berechnen. Die Genauigkeit der hier nur beispielhaft gezeigten Simulationsergebnisse hängt selbstverständlich von der Auflösung der Leiter in einzelne Zellen und der Frequenz f, d.h. der Skintiefe, ab. Die Skintiefe in Kupfer oder Aluminium wird erst jenseits f > 100 kHz kleiner als typische Foliendicken, sodass die Annahme einer konstanten Stromdichte innerhalb der Leiterdicke gerechtfertigt ist.

Der grosse Vorteil der hier besprochenen Methode ist, dass sich auch mit einer gröberen Zellauflösung noch realistische Simulationsergebnisse erzielen lassen. Für Optimierungs-Routinen von Induktivitäten kann damit zunächst eine grobe und schnelle Abschätzung berechnet werden. Schliesslich können individuelle Designs, welche die zu optimierende Zielfunktion minimieren, über aufwändigere und genauere Simulationen mit kleinerer Zellgrösse validiert werden.



Abb. 3.26: 2D-PEEC Beispielrechnung zum Windungsabschnitt 2 aus Abbildung 3.20. a) Geometrische Anordnung der Windungen mit Spiegelebene und Luftspalt, b) Real- und c) Imaginärteil der ortsabhängigen, komplexen Stromdichteverteilung. Im Gegensatz zur Berechnung im Wicklungsfenster (vgl. Abbildung 3.25) wird hier nur eine einzige Spiegelebene verwendet. Die Simulationsparameter sind in Tabelle 3.3.3 aufgelistet.

4 Thermische Modellierung

Die Modellierung und Simulation der thermischen Eigenschaften ist neben der eigentlichen Schaltungsentwicklung, und eventuellen Kenntnis des elektromagnetischen (parasitären) Verhaltens eines Systems, ein wesentlicher Bestandteil beim Hardware-Entwurf in der Leistungselektronik. Die Fragestellung ist hierbei oft, ob die Schaltungskomponenten im Nennbetrieb oder bei Überlast die in Datenblättern angegebenen maximalen Temperaturen nicht übersteigen. Ist dies der Fall, kann die Schaltung thermisch zerstört werden.

Eine weitere Fragestellung welche eine thermische Modellierung erfordert, ist diejenige nach der Lebensdauer der Bauelemente. Lebensdauervorhersagen eines Leistungsmoduls bauen momentan auf Cycling-Tests auf, welche sehr kostspielig und zeitintensiv sind. Allgemein benötigen auch neuere Ansätze, welche die Lebensdauer eines Moduls aufgrund physikalischer Modelle numerisch abschätzen, Informationen über die Temperaturschwankungen innerhalb der Modul- bzw. Komponentenstruktur. [59], [60].

Aus diesem Grund wurde im Rahmen dieser Arbeit die Simulationssoftware GeckoHEAT entwickelt, welche eine Simulation des thermischen Verhaltens eines Leistungsmoduls aufgrund der Wärmeleitungsgleichung erlaubt.

Im Folgenden wird die Finite-Differenzen-Methode (FDM) aus einer Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung hergeleitet und anhand einer Analogie zwischen thermischen und elektromagnetischen Grössen mit der PEEC Methode verglichen. Dabei wird für die thermische Modellierung ausschliesslich die Wärmeleitung berücksichtigt. Tatsächlich ist die Wärmeleitung für Leistungsmodule der primäre Prozess zur direkten Kühlung des Halbleiters. Die Wärmestrahlung ist aufgrund der zu geringen Temperaturen nicht relevant, und eine freie oder erzwungene Konvektion wie sie z. B. durch eine Wasserkühlung erreicht wird, kann über die Definition geeigneter Randbedingungen berücksichtigt werden.

4.1 Die Wärmeleitungsgleichung

Die Grundlage für Wärmeleitungsvorgänge sind in der Wärmeleitungsgleichung (Diffusionsgleichung)

$$c_{\rm p}(\boldsymbol{r},T)\,\rho(\boldsymbol{r})\,\frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \nabla\left[\lambda(\boldsymbol{r},T)\cdot\nabla T(\boldsymbol{r},t)\right] + w(\boldsymbol{r},t,T) \qquad (4.1)$$

abgebildet. Hier ist $T(\mathbf{r}, t)$ das zu berechnende orts- und zeitabhängige Temperaturfeld, $c_{\rm p}$ ist die spezifische Wärmekapazität, λ die Wärmeleitfähigkeit, ρ die Massendichte und w stellt eine Wärmestromdichte dar, welche z. B. durch Randbedingungen wie die elektrischen Verluste eines Leistungshalbleiters oder durch eine konstante Temperatur eines Kühlers angegeben werden. Als Randbedingungen werden nachfolgend diejenigen Flächen bezeichnet, über welche Energie in das Modellvolumen strömt oder dieses verlässt. Das bedeutet insbesondere auch, dass Randbedingungen nicht unbedingt am geometrischen Rand des Modells liegen müssen.

Die Herleitung der Wärmeleitungsgleichung (4.1) folgt mit der Wärmestromdichte $\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{Q}}/A\Delta t$ direkt aus dem Fourier'schen Gesetz $\dot{\boldsymbol{q}} = -\lambda \nabla T$ und der Kontinuitätsgleichung, welche analog zur Definition für elektrische Ströme (2.30) auch für den Wärmestrom formuliert werden kann. Mathematisch stellt die Gleichung (4.1) eine parabolische partielle Differentialgleichung dar, wobei der Wärmefluss der Randbedingungen als Inhomogenitätsterm auftritt.

Die Temperaturabhängigkeit der Materialkonstanten $c_{\rm p} = c_{\rm p}(T)$ und $\lambda = \lambda(T)$ ist üblicherweise eine Funktion, welche nur schwach veränderlich ist, und wird deshalb zunächst vernachlässigt. Die Ortsabhängigkeiten $c_{\rm p} = c_{\rm p}(\mathbf{r})$ und $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$ beinhalten die räumliche Lage der verschiedenen Materialien (z. B. Aluminium, Kupfer) im Modell. Die Ortsabhängigkeit der Materialeigenschaften wird im Weiteren ebenfalls nicht explizit ausgeschrieben, da man sich das Modellvolumen als in einzelne, bezüglich der Materialkonstanten homogene Teile zerlegt vorstellen kann. Damit erhalten wir die vereinfachte Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = a \,\Delta T(\boldsymbol{r},t) + \frac{a}{\lambda} w(\boldsymbol{r},t,T), \quad \text{mit} \quad a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_{\rm p}}, \tag{4.2}$$

wobe
i Δ der Laplace-Operator ist und aals Temperatur
leitfähigkeit oder Wärmediffusivität bezeichnet wird.

4.2 Die Finite-Differenzen-Methode

Durch die Finite-Differenzen-Methode (FDM) wird die kontinuierliche partielle Differentialgleichung (4.2) durch ein System algebraischer Gleichungen angenähert, deren Lösung schliesslich die zeitabhängige Temperaturverteilung in diskreten Punkten wiedergibt. Hier wird kurz die Grundidee der FDM erläutert, sodass darauf aufbauend im nächsten Abschnitt ein Vergleich der FDM mit der Netzwerksimulationsmethode durchgeführt werden kann.

Wie in Kapitel 2.1.2 schon erwähnt, kann der Ableitungsoperator in einem Punkt x_n einer Funktion f(x) durch verschiedene Differenzen angenähert werden

FD/FE
$$\left. \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$
 (4.3)

BD/BE
$$\left. \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$
 (4.4)

CD/TR
$$\left. \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1})}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$
 (4.5)

Das Trapezverfahren (Central-Difference) (4.5), welches einen Fehlerterm zweiter Ordnung besitzt, erhält man durch einfach Addition der Vorwärts-Differenz (4.3) und der Rückwärts-Differenz (4.4). Die Ableitung könnte hier als Approximation sowohl zeitlich als auch in der Raumdimensionen der Wärmeleitungsgleichung (4.2) verwendet werden. Die Bezeichnungen Forward Difference/Forward-Euler, Backward-Difference/Backward-Euler und Central-Difference/Trapezverfahren sind jeweils für die FDM bzw. in der elektrischen Simulation üblich. Die Näherung der zweiten Ableitung erhält man durch zweimalige Anwendung (Verkettung) des Trapezverfahrens (4.5)

$$\left. \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_{n+1}) - 2f(x_n) + f(x_{n-1})}{2\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \,. \tag{4.6}$$

Mit diesen Approximationsverfahren kann schliesslich die Wärmeleitungsgleichung (4.2) diskretisiert werden. Der Laplace-Operator in drei Dimensionen wird durch die Näherung zweiter Ordnung (4.6) ersetzt, wohingegen für die zeitliche Ableitung wahlweise (4.3), (4.4) oder (4.5) verwendet werden kann. Zum Beispiel erhält man damit für das sogenannte Crank-Nicolson-Schema (Zentraldifferenz-Näherung in der Zeitund den drei Raumdimensionen) den Zusammenhang

$$\frac{t_i^k - t_i^{k-1}}{\Delta t} = \frac{a}{2} \left(\frac{\phi_{i-1}^k - 2t_i^k + t_{i+1}^k}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i-1}^{k-1} - 2t_i^{k-1} + t_{i+1}^{k-1}}{\Delta x^2} \right) .$$
(4.7)

Da hier sowohl eine räumliche als auch eine zeitliche Diskretisierung auftritt, wird in dieser Arbeit – um Verwechslungen zu vermeiden – konsequent der aktuelle Zeitschritt durch einen hochgestellten Index dargestellt. Der Übersichtlichkeit halber ist (4.7) nur in einer Raumdimension gegeben.

Bei der Wahl der Integrationsmethode für die zeitliche Ableitung besitzt jede der drei genannten Möglichkeiten (4.3)-(4.5) Vor- und Nachteile. Zusammengefasst sind diese:

• Explizites Verfahren (Forward-Difference): Der zu berechnende Funktionswert $T(\mathbf{r}_i, t_{k+1})$ hängt ausschliesslich von der Temperaturverteilung $T(\mathbf{r}_{i\pm\Delta x}, t_k)$ ab und nicht von Werten benachbarter Zellen zum Zeitpunkt t_{k+1} . Dadurch reduziert sich das zu lösende Gleichungssystem auf eine einfache Auswertung eines algebraischen Ausdrucks mit der numerischen Komplexität $\mathcal{O}(n)$ anstatt der Lösung eines Gleichungssystems mit der Komplexität $\mathcal{O}(n^{1+\epsilon}), \epsilon > 0$, wobei *n* die Anzahl der diskretisierten Knoten ist. Der entscheidende Nachteil des expliziten Verfahrens ist, dass der Zusammenhang

$$r=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}<\frac{1}{2}$$

erfüllt sein muss (Courant-Friedrichs-Lewy Bedingung), damit die Zeitbereichslösung nicht instabil wird [61]. Die Fehlerterme der Lösung sind von der Grössenordnung $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ im Orts- und $\mathcal{O}(\Delta t)$ im Zeitbereich. Um sinnvolle Simulationsergebnisse zu erhalten, muss das System mit einer minimalen Schrittweite Δt durchgeführt werden, was den Geschwindigkeitsgewinn durch die explizite Formulierung wieder zunichte macht. Dies stellt insbesondere deshalb eine starke Einschränkung für die Wahl der Simulationsschrittweite dar, da der Zusammenhang (4.2) im Modell global gelten muss, d. h. bei variabler Zellgrösse ist die kleinste Zelle für die Schrittweite massgeblich.



Abb. 4.1: Berechnungs-Moleküle für einige übliche FDM Diskretisierungen. Die x_i -Dimension kann bei mehrdimensionalen Modellen in verschiedene Raumrichtungen zeigen, verbundene Knoten liegen in direkter Nachbarschaft. Die im aktuellen Schritt zu berechnenden Werte sind rot markiert, die vom vorherigen Schritt bekannten Zahlenwerte sind schwarz ausgefüllt.

- Implizites Verfahren (Backward-Difference): Das Verfahren ist für jede Wahl des Zeitschrittes stabil und besitzt dieselben Fehlerterme wie das implizite Verfahren, jedoch ist die Lösung eines Gleichungssystems nötig.
- Das Crank-Nicolson-Verfahren (Central-Difference) ergibt sich aus der Addition des impliziten und expliziten Verfahrens, bzw. durch Anwendung von (4.5). Die rechnerische Komplexität entspricht derjenigen des impliziten Verfahrens, jedoch sinkt der Fehlerterm mit der Grössenordnung Δt^2 , d.h es sind wesentlich grössere Zeitschritte im Vergleich zum impliziten Verfahren bei gleicher Simulationsgenauigkeit möglich.

In der Lehrbuch-Literatur zur FDM wird üblicherweise für jedes Berechnungsschema ein "Molekül" dargestellt; für die oben besprochenen Diskretisierungen sind diese in Abbildung 4.1 gezeigt. Hierin wird deutlich, weshalb für das explizite Schema kein Gleichungssystem gelöst werden muss: Für die Berechnung des rot markierten Temperaturwertes T_i^{k+1} werden ausschliesslich die vorangehenden und bekannten Temperaturwerte benötigt. Es existieren noch weitere Diskretisierungsschemata mit verschiedenen Stabilitätseigenschaften und Fehlertermen (z. B. Richardson, Dufort-Frankel, Leapfrog); hierfür sei auf die Literatur verwiesen, z. B. [62].

Abschliessend werden noch die resultierenden Matrixgleichungen für

das implizite Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren angeben, welche man z. B. durch Auflösen der Gleichung (4.7) nach t_i^{k+1} erhält. Der Einfachheit halber wird hier von einer Diskretisierung mit würfelförmigen Volumenzellen ausgegangen. Die Randelemente und auch die Randbedingungen werden zunächst vernachlässigt. Dies schliesst eine spätere Verallgemeinerung nicht aus, aber anhand der im nächsten Abschnitt gezeigten Zusammenhänge zwischen Netzwerk-Simulationsmethode (NSM) und dem FDM-Verfahren wird die Verallgemeinerung ohnehin offensichtlich. Die Matrixgleichung

stellt das zu lösende Gleichungssystem für das FDM-Verfahren dar, die Lösungsvariable T_i^k sind die diskretisierten Temperaturwerte am Knoten mit dem Index i zum Zeitschritt k. Man beachte, dass die Koeffizientenmatrix symmetrisch ist.

Die Matrixeinträge aus (4.8) werden ausschliesslich aus der Modellgeometrie und den physikalischen Materialeigenschaften a und Δx berechnet. Hierbei ist folgendes zu beachten: die Koeffizienten β_{ij} sind nur dann ungleich Null, falls der *i*-te Knoten im Raum ein direkter Nachbar zum *j*-ten Knoten ist. Das bedeutet, dass für ein eindimensionales Gitter nur ein Koeffizient β pro Zeile verschieden ist, für ein zweidimensionales Modell erhält man 4 Einträge für β in jeder Zeile oder Spalte, im dreidimensionalen Raum entsprechend 6. Dies gilt natürlich nur für reguläre Knoten innerhalb des Gitters, am Modellrand oder bei variablen bzw. unstetigen Gittern kann diese Anzahl variieren.

Die konkreten Werte für die Koeffizienten der FDM-Matrix sind in Tabelle 4.1 für das implizite Schema und das Crank-Nicolson Schema dargestellt. Im Falle des expliziten Schemas würde im Gleichungssystem die Lösungsvariablen T_i^k auf der rechten Seite von (4.8) auftreten, d. h. die Lösung könnte durch eine einfache Matrixmultiplikation berechnet werden. Aufgrund des potentiell instabilen Verhaltens kommt das explizite Schema aber als Lösungsverfahren meist nicht zur Anwendung. Weiter unten wird jedoch gezeigt, dass das explizite Verfahren zur

	$lpha_i$	β_{ij}	γ_i
Implizites Schema	$\frac{1}{m} - \sum_{i=1}^{m} \beta_{ii}$		T_i^k
(Backward Difference,	$\Delta t = \sum_{j=1}^{j \sim ij}$	Δx^2	Δx^2
Backward Euler)			1 1
Crank-Nicolson (Trapezverfahren)	$\frac{1}{\Delta t} - \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij}$	$-\frac{a}{2\Lambda r^2}$	$\frac{T_i^{\kappa-1}}{2\Lambda r^2}$
Droj Lovol	$\begin{array}{ccc} \Delta t & j=1 \\ 1 & m \end{array}$	$\frac{2\Delta a}{3a}$	$T_{k}^{k} 2T_{k}^{k}$
(Gear-Shichman)	$\frac{1}{\Delta t} - \sum_{j=1} \beta_{ij}$	$\left -\frac{5a}{2\Delta x^2} \right $	$\frac{1}{2\Delta x^2} - \frac{21}{\Delta x^2}$

Tabelle 4.1: Koeffizienten der Finite-Differenzen-Matrix aus Gleichung (4.8). Zu beachten ist, dass die Einträge β_{ij} nur dann ungleich Null sind, falls die FDM Zellen *i* und *j* in direkter Nachbarschaft sind.

numerischen Stabilisierung der Berechnungsmethode der nichtlinearen Wärmeleitfähigkeit verwendet werden kann.

4.3 Thermisch-Elektrische Analogie

Zwischen den Gleichungen der Wärmeleitung und elektrischen Grössen existieren einige Analogien, sodass es naheliegend ist diese Analogien auch bei der Implementierung eines thermischen Solvers zugrunde zu legen. Für ein Material mit homogener thermischer Leitfähigkeit kann ein thermischer Widerstand definiert werden

$$R_{\rm th} = \frac{\Delta T}{|\dot{\boldsymbol{Q}}|} \iff R_{\rm el} = \frac{U}{|\boldsymbol{i}|},$$
 (4.9)

der analog zum elektrischen Widerstand die Proportionalität zwischen Temperaturdifferenz und Wärmestrom ausdrückt. Eine ähnliche Äquivalenz findet man auch für elektrische und thermische Kapazitäten, wobei sich hier die Wärmekapazität über die Materialeigenschaft der spezifischen Wärmekapazität

$$c_{\rm p} = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} \tag{4.10}$$

berechnen lässt. Die sich jeweils im Elektrischen und Thermischen entsprechenden Grössen sind in Tabelle 4.2 gegenübergestellt. Damit lässt

Thermisch	Elektrisch
Temperatur ΔT in K	Spannung ΔU in V
Wärmewiderstand $R_{\rm th}$ in K/W	elektrischer Widerstand R in Ω
Wärmestrom $\dot{\boldsymbol{Q}}$ in W	elektrischer Strom i in A
Wärmeleitfähigkeit λ in W/(mK)	elektrische Leitfähigkeit σ in S/m
Wärmekapazität $C_{\rm th}$ in J/K	Kapazität C in F

Tabelle 4.2: Analogie zwischen Wärmeleitung und elektrischer Leitung: die sich entsprechenden physikalischen Grössen sind in der Tabelle mit der jeweiligen SI-Einheit einander gegenübergestellt.

sich anhand der Analogie ein thermisches Modell bestehend aus thermischen Widerständen und thermischen Kapazitäten aufbauen, siehe hierzu Abbildung 4.2. Eine der ersten "Simulationsmethoden" zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung war ein analoges, diskret aufgebautes elektrisches RC-Netzwerk, worin die transiente Temperaturverteilung durch Messung der Spannungen ermittelt werden konnte [63].

4.4 Lineare Modellgleichungen

Die Ähnlichkeit der thermischen Modellierung (Abbildung 4.2) und elektromagnetischen PEEC-Modellen (Abbildung 2.6) ist sofort ersichtlich. Der einzige Unterschied der netzwerkorientierten Modellierung der Wärmeleitungsgleichung besteht darin, dass Kopplungsinduktivitäten im Thermischen nicht auftreten, und dass die Kapazitätsmatrix $C_{\rm th}$ eine Diagonalmatrix ist. Aufgrund der fehlenden Induktivität kann zur Lösung der Modellgleichungen das Knotenpotentialverfahren effizient verwendet werden. Aus (2.13) erhält man damit das vereinfachte Gleichungssystem

$$\boldsymbol{Y}_{\rm th}\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{Q}} \tag{4.11}$$

mit der thermischen Admittanzmatrix

$$\boldsymbol{Y}_{\rm th} = \boldsymbol{C}_{\rm th} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{A} \boldsymbol{R}_{\rm th}^{-1} \boldsymbol{A}^{\rm T} = \boldsymbol{C}_{\rm th} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{A} \boldsymbol{G}_{\rm th} \boldsymbol{A}^{\rm T}.$$
(4.12)

Man beachte, dass die Leitwertmatrix $G_{\rm th} = R_{\rm th}^{-1}$ und $C_{\rm th}$ reine Diagonalmatrizen sind, deren Invertierung trivial ist. Die Lösung der Ma-



Abb. 4.2: Analogie zwischen elektrischer und thermischer Leitung. Ein Wärmeleiter kann durch thermische Widerstände und Kapazitäten modelliert werden. Die Abbildung zeigt eine thermische Zelle, welche über 6 Widerstände mit den Nachbarzellen verbunden ist.

trixgleichung (4.12) im Zeitbereich, wird in Abschnitt 4.6 detailliert besprochen.

Die netzwerkorientierte thermische Modellierung wir in der Literatur auch als "Network Simulation Method" (NSM) bezeichnet [64]. Verwendet man eine der Diskretisierungsmethoden für den Differentialoperator d/dt, wie es z. B. in Abschnitt 2.1.2 dargestellt ist, erkennt man durch einen Vergleich der Gleichungssysteme sofort, dass die Finite-Differenzen-Methode und die NSM identisch sind, d. h. eine explizite Unterscheidung der Methoden wird überflüssig:

Die Werte der thermischen Kapazität werden mit

$$C_{\rm th,i} = c_{\rm p,i} \,\rho_i \,\Delta V_i \quad \text{mit } \Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i \,, \tag{4.13}$$

und die thermischen Leitwerte mit

$$G_{\rm th}, ij = \frac{\lambda A_{ij}}{l_{ij}} \tag{4.14}$$

berechnet. Hier wird wieder, ähnlich zur PEEC-Methode, ein Versatz der kapazitiven Volumenzelle und der Widerstandszelle um eine halbe Zellenlänge verwendet. A_{ij} ist die Querschnittsfläche der Widerstandszelle vom Knoten *i* zum Knoten *j*, und l_i dessen Länge in Flussrichtung. In Tabelle 4.1 sind die Namen der sich entsprechenden FDMund NSM-Methoden mitsamt den Matrixeinträgen bereits eingetragen. Die Äquivalenz beider Gleichungssyteme sieht man durch Multiplikation von (4.11) von links mit C^{-1} , bei würfelförmigen Zellen heben sich dann die Terme $\Delta V_i = A_{ij} \cdot l_{ij}$ gegenseitig auf und die Temperaturleitfähigkeit ist identisch mit $a = \lambda/c_{p\rho}$.

Die oben gezeigte Äquivalenz zwischen der PEEC-Methode, thermischer Finite-Differenzen-Methode und NSM bietet nun die folgenden Vorteile:

- Die thermische Modellierung ist aufgrund der thermisch-elektrischen Analogie für den Elektroingenieur, welcher den Umgang mit Strom- und Spannungsgrössen gewohnt ist, sehr intuitiv.
- Randbedingungen können als Strom- und Spannungsquellen im folgenden Abschnitt sehr einfach und intuitiv definiert werden.
- In der Software-Implementierung des thermischen und elektromagnetischen Solvers kann eine Redundanz grösstenteils vermieden werden. Insbesondere können die Benutzeroberfläche, Modellvisualisierung, Zellen-Generierung, das Post-Processing bzw. die Visualisierung der Ergebnisse sowie Teile des Solvers gemeinsam von GeckoHEAT und GeckoEMC verwendet werden. Dies reduziert auch den Wartungsaufwand für Verbesserungen und Erweiterungen der Software enorm.

4.5 Randbedingungen und Inhomogenitätsterm

Bisher wurde in der Systemgleichung nur die Modellierung und Diskretisierung der homogenen Wärmeleitungsgleichung dargestellt. Um eine sinnvolle Simulation durchzuführen zu können, muss das Modell über entsprechende Randbedingungen angeregt werden. Eine Randbedingung stellt z. B. ein zeitabhängiger Wärmestrom (Leistung) dar, welcher in einem Leistungsmodul im Halbleiter als Verlustenergie (Leit- und Schaltverluste) auftritt. Ausserdem muss der Wärmeabfluss im Modell z. B. durch eine konstante Temperatur an einer Kühlkörperfläche oder durch eine konvektive Randbedingung einer luftgekühlten Fläche erfolgen.

Demnach liegen Randbedingungen für FDM Modelle nicht zwingend am geometrischen Rand des Modells, sondern treten an beliebigen Knoten innerhalb des Modells auf, über welche ein Zu- oder Abfluss von Wärmeenergie stattfindet. Für die Wärmeleitungsgleichung (4.1) stellen die Randbedingungen damit den Inhomogenitätsterm $w(\mathbf{r}, t, T)$ dar.

Im Folgenden werden die drei in GeckoHEAT implementierten Typen von Randbedingungen vorgestellt. Dabei können die entsprechenden Zusammenhänge und Matrix-Stempel direkt aus der Analogie zwischen thermischen und elektrischen Grössen abgeleitet werden.

Vorgegebene Temperatur als Randbedingung

Eine vorgegebene Temperatur an ausgewählten Knoten im FDM-Modell entspricht im Elektrischen einer Spannungsquelle, welche zwischen diesen Knoten und dem Potential im Unendlichen eingefügt wird.

Leider ist für das hier verwendete Knotenpotentialverfahren eine direkte Einbindung von Spannungsquellen nicht möglich. Deshalb muss für jede ideale Spannungsquelle bzw. Temperaturrandbedingung das Modell um eine zusätzliche Variable erweitert werden. Diese Variable stellt im Gleichungssystem den resultierenden Strom bzw. den Wärmefluss durch die neue Komponente dar. Der entsprechende Matrixstempel für eine gesteuerte Spannungsquelle lautet damit

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1\\ \cdot & \cdot & (-1)\\ 1 & (-1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{k+1}\\ T_2^{k+1}\\ i_{\text{source}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^k\\ \gamma_2^k\\ T_2^k\\ T_{\text{source}} + \gamma_c^k \end{pmatrix}$$
(4.15)



Abb. 4.3: Transformation einer Spannungsquelle (vorgegebene Temperatur eines Knotens) in eine auf Stromquellen basierte Näherung.

Die geklammerten Einträge (-1) werden, da der zweite Anschluss der Quelle gegen das Nullpotential gerichtet ist, nicht in die Systemmatrix einbezogen, sind zur Vollständigkeit aber dargestellt. Neben der gering wachsenden Matrixgrösse mit jeder Spannungsquelle ist ein weiterer Nachteil der fest vorgegebenen Temperatur, dass die Systemmatrix des Knotenpotentialverfahrens durch den verwendeten Matrixstempel (4.15) indefinit wird, was einen erhöhten Aufwand beim Lösen der Matrixgleichung bedeutet.

Durch die in Abbildung 4.3 gezeigte Transformation der idealen Spannungsquelle in eine äquivalente Stromquelle kann die Positiv-Definitheit der Matrix sichergestellt werden. Dabei muss lediglich darauf geachtet werden, dass der Ersatzwiderstand der Stromquelle viel kleiner gewählt wird als die internen thermischen Widerstände des FDM-Netzwerks. Theoretisch wäre es auch möglich die Spannungsquelle ohne Näherung durch mehrere gesteuerte Stromquellen parallel zu den thermischen Widerständen zu ersetzen. Die einfache, in Abbildung 4.3 gezeigte Näherung hat sich aber in der Praxis als vollkommen ausreichend erwiesen.

Flächenleistungsdichte als Randbedingung

Eine in das thermische Modell eingespeiste Flächenleistungsdichte wird typischerweise zur Modellierung der Halbleiterverluste verwendet. Dabei kann vom Benutzer wahlweise eine Gesamtleistung angegeben werden, welche in ausgewählte Knoten im FDM-Modell eingespeist wird, oder alternativ eine Flächenleistungsdichte innerhalb einer vorgegebenen (rechteckigen) Fläche.



Abb. 4.4: Typische Temperaturverteilung für eine Konstantleistung als FDM-Randbedingung. Das schwarze Rechteck zeigt die Abmessungen der verwendeten Randbedingung, die roten Punkte stellen die Temperaturknoten des FDM-Modells dar.

Unter Zuhilfenahme der thermisch-elektrischen Analogie aus Abschnitt 4.3 ist sofort einsichtig, dass eine Wärmeleistung einer Stromquelle entspricht, welche zwischen den Modellknoten und dem Nullpotential angebracht wird. Ein Matrixstempel für die Stromquelle ist im Knotenpotentialverfahren nicht nötig, da der Wert der Stromquelle direkt zu den entsprechenden Komponenten des Vektors γ der Matrixgleichung (4.8) bzw. dem Wärmestrom $\dot{\boldsymbol{Q}}$ aus (4.11) addiert wird.

Die Umrechnung der Gesamtleistung in eine Flächenleistungsdichte folgt trivial aus der vorgegebenen Fläche der Randbedingung. Bei der Software-Implementierung ist lediglich darauf zu achten, dass Zellen des Finite-Differenzen-Modells, welche nur teilweise von der Randbedingung überdeckt werden, entsprechend der Überdeckungsfläche gewichtet werden. Abbildung 4.4 zeigt ein Bildschirmfoto der im Rahmen dieser Arbeit erstellten Software GeckoHEAT mit einer als Randbedingung definierten Flächenleistungsdichte.

Konvektionsrandbedingung

Die Simulation von Wärmetransport über Konvektion, laminare oder turbulente Strömungen wurde in der Erstversion von GeckoHEAT noch nicht vorgesehen. Man kann den konvektiven Wärmetransport aber dennoch über geeignete Randbedingungen modellieren, wobei hierfür vom



Abb. 4.5: Die für die Konvektions-Randbedingung definierten FDM-Knoten werden über thermische Widerstände auf eine Umgebungstemperatur $T_{\text{amb.}}$ geleitet.

Benutzer ein Wärmeübertragungskoeffizient h zu definieren ist. Über das Newtonsche Abkühlungsgesetz erhält man den Zusammenhang

$$\dot{Q} = h A \cdot (T_{\text{bound.}} - T_{\text{amb.}}).$$
(4.16)

Betrachtet man die physikalische Einheit $[h] = 1 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, erkennt man leicht, dass h den inversen Wärmewiderstand pro Fläche darstellt, wie es in Abbildung 4.5 angedeutet ist.

In der Praxis wird der Wärmeübertragungskoeffizient durch empirische Formeln, Tabellen oder Experimente bestimmt, wie z. B. in [65]. In Tabelle 4.3 sind einige typische Werte für den Wärmeübertragungskoeffizienten h angegeben. Wie der Tabelle zu entnehmen ist, sind je nach geometrischen Verhältnissen (vertikale Platte/waagrechte Platte) unterschiedliche Werte von h zu verwenden. Für den jeweils konkreten Anwendungsfall kann im Wärme-Atlas [66] der entsprechende Wert des Wärmeübertragungskoeffizienten nachgeschlagen werden.

Freie Konvektion, $\Delta T = 30K$	h in W/m ² K
Vertikale Platte in Luft, 0.3 m Höhe	4.5
Horizontaler Zylinder in Luft, $5\mathrm{cm}$ Durchmesser	6.5
Horizontaler Zylinder in Wasser, $2\mathrm{cm}$ Durchmesser	890

Tabelle 4.3: Ausgewählte Wärmeübertragungskoeffizienten h, aus [65].

4.6 Matrixsolver

Der grösste numerische Aufwand für die Lösung thermischer Modelle nach dem Finite-Differenzen-Verfahren besteht in der Lösung der Matrixgleichung (4.12). Die Berechnung der Matrixeinträge selbst ist, im Gegensatz zur PEEC Methode, weniger aufwändig, da für jeden Knoten im Modell nur eine einzige Wärmekapazität und bis zu maximal 6 thermische Widerstände aus den Zellgeometrien berechnet werden müssen. Damit wächst der Aufwand zur Erstellung der Matrixgleichungen mit $\mathcal{O}(n)$ und ist damit vernachlässigbar.

Der direkte Ansatz, die Gleichung (4.12) mittels LU-Dekomposition zu faktorisieren ($\mathcal{O}(n^3)$) und später für jeden Zeitschritt per Rückwärtssubstitution zu lösen $\mathcal{O}(n^2)$, ist mit heutigen Computern leider nur bis zu der Grössenordnung von etwa 10000 Knoten praktikabel, da ansonsten der Rechenaufwand und der Speicherbedarf unrealistisch gross werden.

Da die Matrix $Y_{\rm th}$ sehr dünn (englisch: sparse) besetzt ist, ist die Verwendung eines Matrixsolvers, der nur die von Null verschiedene Positionen der Matrixeinträge berücksichtigt, unumgänglich. Durch den Einsatz von Datenstrukturen, welche über Indextabellen nur die von Null verschiedenen Einträge speichern, kann damit auch der Speicherbedarf für die Matrix selbst auf $\mathcal{O}(n^{2-\epsilon})$ mit $\epsilon > 0$ reduziert werden [67]. Die Matrixeinträge eines typischen FDM-Modells sind in Abbildung 4.6 gezeigt. Für dieses Beispiel mit 5000 Gleichungen sind nur etwa 0.6 ‰00 der Matrixeinträge von Null verschieden.

Generell kann man zur Lösung dünn besetzter Matrixgleichungen zwischen direkten und iterativen Verfahren unterscheiden. Nachfolgend werden die zwei Ansätze, sowie ihre Vor- und Nachteile kurz zusammengefasst.

4.6.1 Iterativer Matrixsolver

Bei iterativen Lösungsmethoden wird versucht durch Einsetzen und Variation eines angenäherten Lösungsvektors \boldsymbol{x}^k das Residuum

$$\boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{M} \boldsymbol{x}^k \tag{4.17}$$

zu minimieren, d. h. falls das Verfahren konvergiert, wird der relative Fehler nach endlich vielen Schritten eine vorgegebene Schranke unterschreiten. Für die Wahl eines effizienten iterativen Algorithmus ist



Abb. 4.6: Verteilung der Matrixeinträge $\neq 0$ der Systemmatrix des FDM-Modells, welches auf Seite 130 vorgestellt wird.

eine möglichst genaue Charakterisierung der zu lösenden Matrixgleichung von Vorteil. Im Knotenpotentialverfahren der FEM-Methode erhält man symmetrische Matrizen. Mit der zusätzlichen Einschränkung, dass keine konstante Temperatur als Randbedingung verwendet wird, ist die Matrix $Y_{\rm th}$ sogar symmetrisch positiv definit, d. h. es gilt

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{th}}\boldsymbol{x} > 0 \; \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}.$$

$$(4.18)$$

Der effizienteste iterative Lösungsalgorithmus für symmetrisch positiv definite Matrizen ist das konjugierte Gradientenverfahren [68], für welches man zeigen kann, dass – abgesehen von Rundungsfehlern – eine Konvergenz spätestens innerhalb von n^2 Iterationen eintritt. Oft wird eine ausreichend gute Konvergenz schon nach wesentlich weniger Schritten erreicht. Jeder Iterationsschritt besteht in der Auswertung eines Matrix-Vektor-Produktes, wobei die dünnbesetzte Matrix-Struktur hier vorteilhaft verwendet wird [69]. Selbstverständlich sind vorgegebene Temperaturen als Randbedingungen für sinnvolle Modelle unverzichtbar. Mithilfe der vorher beschriebenen Transformation (Abbildung 4.3) können jedoch konstante Temperaturen im Modell näherungsweise erreicht werden, sodass das konjugierte Gradientenverfahren für die FEM-Methode ohne Einschränkung in Frage kommt.

Ein zusätzlicher Vorteil des iterativen Solvers ist, dass nichtlineare Materialeigenschaften, wie z. B. $\lambda(T)$, $c_p(T)$ ohne besonderen Mehraufwand verwendet werden können, da dafür lediglich die Matrix $Y_{\rm th}$ für die iterativen Matrix-Vektor-Produkte aktualisiert werden muss.

Ein weiterer Effizienzgewinn könnte durch den direkten Einsatz des Multigrid-Verfahrens, oder durch eine Vorkonditionierung der Systemmatrix mit dem Multigrid-Verfahren erreicht werden. Das Multigrid-Verfahren erreicht eine beschleunigte Konvergenz durch eine Variation der Gitterauflösung, um zusätzliche Informationen für den iterativen Prozess zu erhalten.

In dieser Arbeit wurde ein detaillierter Vergleich zwischen direkten und iterativen Solvern nicht durchgeführt. Wie im nächsten Abschnitt begründet wird, kommt hier ausschliesslich das direkte (sparse) Lösungsverfahren zum Einsatz. Ob iterative Matrixsolver dennoch für die thermische FDM-Modellierung im Zeitbereich vorteilhaft sind, ist eventuell noch abzuklären.

4.6.2 Direkter Sparse-Matrixsolver

Direkte Lösungsmethoden für dünnbesetzte Matrizen führen im Allgemeinen eine LU-Faktorisierung $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ durch. Bei diesen Methoden wird durch komplexe Algorithmen versucht die Anzahl der neu bei der Faktorisierung entstehenden Matrixeinträge (Fill-in) zu minimieren, und damit die Laufzeit des Algorithmus im Vergleich zur einfachen Gauss-Elimination von $\mathcal{O}(n^3)$ auf geringere Werte, typischerweise $\mathcal{O}(n \log n)$ zu reduzieren [70], [71]. Die End-Lösung des Gleichungssystems, d. h. die Rücksubstitution in die faktorisierte untere (\mathbf{L}) und obere (\mathbf{U}) Dreiecksmatrix ist typischerweise um Grössenordnungen schneller als die Faktorisierung selbst, da hier die dünne Besetzung der faktorisierten Matrix voll zur Geltung kommt.

In der Literatur findet man nur wenige Diskussionen darüber, für welchen Problemtyp direkte oder iterative Lösungsstrategien bevorzugt werden sollten. So wird z.B in [72] vorgeschlagen, für zweidimensionale Probleme einen direkten Solver zu verwenden, im Dreidimensionalen könnten aber iterative Solver vorteilhaft sein. Führt man – wie für die thermische Modellierung mittels FDM – eine Zeitbereichssimulation durch, bei der einige hundert bis tausend Simulationsschritte durchgeführt werden müssen, so wird der Einsatz eines direkten Solvers von Vorteil sein, da eine rechenaufwändige Matrixfaktorisierung bei linearen Modellen nur einmal, vor Beginn der eigentlichen Simulation, durchgeführt werden muss.

Ein zusätzliches Argument, welches für den Einsatz von direkten Methoden spricht, ist die Robustheit der Algorithmen. Bei iterativen Solvern hängt die Anzahl der zur Konvergenz nötigen Iterationsschritte empfindlich von der Konditionszahl der Systemmatrix ab. Bei sehr grossen Konditionszahlen und indefiniten Problemen kann es des öfteren vorkommen, dass die Algorithmen nicht konvergieren und schliesslich zu keiner Lösung führen. Direkte Methoden sind weniger empfindlich gegenüber schlecht konditionierten Matrizen, und führen deshalb mit gut vorhersagbarer Rechendauer zu einem Ergebnis.

Der grösste Nachteil eines direkten Solvers gegenüber iterativen Solvern ist, dass die benötigte Speichergrösse, um die faktorisierte Matrix im Arbeitsspeicher des Rechners zu halten, aufgrund des Matrix-fill-ins ein Vielfaches der ursprünglichen Matrixgrösse beträgt.

Letzendlich kommt für die Software GeckoHEAT ein direkter Solver zum Einsatz, da eine Modellordnungsreduktion (siehe Abschnitt 5) ohnehin eine Faktorisierung der Systemmatrix benötigt, sodass derselbe Solver für die Simulation als auch die Modellordnungsreduktion Verwendung findet.

Die zurzeit bekanntesten direkten Solver für dünnbesetzte Matrizen sind MUMPS [73], UMFPACK [74], SuperLU [75] und Pardiso [76], [77], [78]. Einen Vergleich der Software-Pakete aus der Sicht des Anwenders findet man in [79]. Für die Software GeckoHEAT fiel die Wahl auf den Solver Pardiso (Parallel Direct Solver), da dieser die folgende Funktionalität und Flexibilität besitzt:

- Genaue Spezifikation des verwendeten Matrix-Typs: symmetrisch \leftrightarrow unsymmetrisch, positiv definit \leftrightarrow indefinit, reell \leftrightarrow komplex.
- Für sehr grosse Matrizen können die Werte der Faktorisierung auf die Festplatte ausgelagert werden.
- Wiederholte Faktorisierungen derselben Matrixstruktur, aber mit

veränderten Werten, können aufgrund einer zuvor bereits durchgeführten Faktorisierung beschleunigt werden. Dies ist bei der Simulation nichtlinearer Materialeigenschaften (siehe nächster Abschnitt) von grossem Vorteil.

- Mehrprozessor-Fähigkeit.
- Die Software ist für sämtliche gängige Betriebssysteme sowie 32und 64-Bit Plattformen verfügbar.
- Pardiso ist im kommerziellen Softwarepaket der "Intel Math Kernel Library" (Intel MKL) enthalten, welche ausführlich getestet und speziell für die Rechnerarchitektur des PCs optimiert wurde.

4.6.3 Temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit

Bisher wurde von ausschliesslich linearen Materialeigenschaften ausgegangen. Tatsächlich sind sowohl der thermische Widerstand als auch die Wärmekapazität abhängig von der Materialtemperatur. Abbildung 4.7 zeigt die Wärmeleitfähigkeit $\lambda(T)$ für einige Materialien, welche im Wärmepfad von Leistungsmodulen zum Einsatz kommen. Hier sieht man deutlich, dass die Abhängigkeit $\lambda(T)$ bei Metallen sehr schwach ist (Wiedemann-Franz-Gesetz); Ähnliches gilt für Nichtleiter. Bei Halbleitern hingegen wird der Wärmewiderstand mit zunehmender Temperatur wesentlich grösser, sodass für Halbleitermaterialien die Temperaturabhängigkeit $\lambda(T)$ bei Simulationen möglichst berücksichtigt werden sollte. Insbesondere, wenn z. B. durch Einsatz von SiC-Halbleitern ein sehr weiter Temperaturbereich abgedeckt wird, sollte diese Abhängigkeit mit einbezogen werden. Andernfalls sind Simulationsfehler in der Grössenordnung von 5% und mehr möglich [80].

Eine relativ exakte Berücksichtigung der temperaturabhängigen Wärmeleitfähigkeit $\lambda(T)$ im Modell würde man durch kontinuierliches Verändern der Widerstandswerte $R_{\rm th}$ erreichen. Dies ist jedoch nicht praktikabel, da eine zeitaufwändige Matrixfaktorisierung bei jedem Zeitschritt benötigen würde. Deshalb wird im Folgenden dargestellt, wie die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit durch den geschickten Einsatz gesteuerter Stromquellen mit in das Simulationsmodell einbezogen werden kann, wobei die Stromquellen im Sinne der elektrisch-thermischen Analogie hier als gesteuerte Wärmestromquellen $\dot{Q} = \dot{Q}(u_i)$ zu verstehen ist.



Abb. 4.7: Temperaturabhängigkeit der thermischen Leitfähigkeit λ für einige Materialien [80]. Der für den Einsatz von Leistungshalbleitenn typische Temperaturbereich ist in der Abbildung hervorgehoben.

Abbildung 4.8 zeigt die Positionierung der gesteuerten Quellen im Netzwerk. Durch die zusätzlichen Quellen werden keine weiteren Potentiale bzw. Temperaturknoten eingeführt, sodass die Modellgrösse nicht wächst. Die im Modell bereits vorhandenen thermischen Widerstände stellen für die nichtlineare Berechnung den Arbeitspunkt $R_{\rm op}$ dar. Für jeden Zeitschritt muss nun der Wert sämtlicher Stromquellen so berechnet werden, dass sich ein zusätzlicher Spannungsabfall am Widerstand ergibt, der den Fehler durch die Abweichung des für konstante Wärmeleitfähigkeit berechneten Arbeitspunktes vom tatsächlichen Wert kompensiert. Ein erster Ansatz wäre den der Stromwert jeder Quelle über

$$\dot{Q}_{ij}^{k+1} = \frac{T_i^k - T_j^k}{R(T_{c_{ij}}^k)} - \frac{T_i^k - T_j^k}{R_{\rm op}}$$
(4.19)

zu berechnen, wobei $T_{c_{ij}}^k = 0.5 \cdot (T_i^k + T_j^k)$ die mittlere Temperatur zwischen Knoten *i* und *j* zum Zeitpunkt t_k darstellt. Der zweite Term in (4.19) stellt den tatsächlichen Strom einer Widerstandszelle dar, der erste Term ist der Strom welcher sich aufgrund der variablen Leitfähigkeit ergibt. Hierbei ist zu beachten, dass für den Zeitschritt k + 1 der Fehler aus dem Zeitschritt k korrigiert wird. Da der Stromwert explizit berechnen werden soll, sind die Werte von T_i^{k+1} und T_j^{k+1} noch nicht bekannt. Leider führt der Ansatz (4.19) für praktikable Zeitschrittweiten Δt und typische Verläufe von $\lambda(T)$ durch den Versatz der Zeitschritte auf ein instabiles Lösungsverhalten und ist deshalb nicht generell brauchbar.

Die beobachtete Instabilität äussert sich in einem Aufschaukeln der



Abb. 4.8: Erweiterung des thermischen Netzwerkes durch gesteuerte Quellen, welche das nichtlineare Verhalten, d. h. die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit nachbilden.

Temperaturwerte ohne äusseres Zutun, d.h. die um einen Zeitschritt versetzt gesteuerten Quellen stellen mit dem Modell ein instabiles System dar. Insbesondere für thermische Leitwerte welche mit der Temperatur zunehmen, tritt dieser Effekt auf¹.

Der folgende Ansatz verbessert das Stabilitätsverhalten, auch für steigende Leitwertkurven: Die Temperaturen T_i^{k+1} sind zwar vor der Rücksubstitution in die faktorisierte Matrix noch nicht bekannt, mit dem Expliziten FDM-Schema lässt sich jedoch ohne grösseren Rechenaufwand ein Näherungswert $\tilde{T}_i^{k+1} \approx T_i^{k+1}$ für diese Temperaturen berechnen.

Das explizite Lösungsverfahren (Forward Euler) selbst kann zu instabilen Modellen führen; hier wird dieses Verfahren jedoch nur zur Berechnung des Korrekturstromes \dot{Q}_{ij} verwendet, um basierend auf diesem Wert \dot{Q}_{ij} wieder ein implizites Verfahren (Rückwärts-Differenz oder Crank-Nicolson) anzuwenden. Der Rechenaufwand für diese Abschätzung ist lediglich eine Matrixmultiplikation einer Systemmatrix mit dem Temperaturvektor, wobei die Systemmatrix sehr dünn besetzt ist und sich die Multiplikation damit in $\mathcal{O}(n)$ implementieren lässt. Damit erhält man die verbesserte Version von (4.19)

$$\dot{Q}_{ij}^{k+1} = \left(\tilde{T}_i^{k+1} - \tilde{T}_j^{k+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{R(\tilde{T}_{c_{ij}}^{k+1})} - \frac{1}{R_{\rm op}}\right) \,. \tag{4.20}$$

Prinzipiell lässt sich die Abschätzung von \tilde{T}_i durch das explizite Verfahren auch iterativ anwenden, d. h. die temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit kann über ein Newton-Raphson-Verfahren beliebig genau

¹wobei dies nicht zu verwechseln ist mit dem "thermischen Durchgehen" (thermal runaway), welches ein physikalisch instabiles Verhalten des Modells beschreibt.



Abb. 4.9: Die auf Debye-Temperatur normierte Temperaturabhängigkeit $T/T_{\rm D}$ der Wärmekapazität, siehe hierzu auch Tabelle 4.4.

einbezogen werden. Da die hier gezeigte erste Näherung schon relativ gute Ergebnisse liefert, wurde die Iteration in GeckoHEAT nicht implementiert.

4.6.4 Nichtlineare elektrische Kapazitäten und temperaturabhängige Wärmekapazität

Man kann die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität für Festkörper mithilfe der Debye-Temperatur $T_{\rm D}$ zu

$$c_{\rm v} \approx c_{\rm p} = 9R \left(\frac{T}{T_{\rm D}}\right)^3 \int_{0}^{T_{\rm D}/T} \frac{t^4 {\rm e}^t}{({\rm e}^t - 1)^2} \,{\rm d}t$$
 (4.21)

abschätzen. Im Speziellen erhält man eine T^3 -Abhängigkeit bei tiefen Temperaturen und eine näherungsweise konstante spezifische Wärme-kapazität für $T>T_{\rm D}$. In Tabelle 4.4 und Abbildung 4.9 sind die Werte und Verläufe für die wichtigsten Materialien dargestellt.

Um die variable Wärmekapazität korrekt in die FDM Simulation einzubeziehen kann wieder die Analogie zwischen elektrischen und thermischen Grössen herangezogen werden, d. h. es wird zunächst eine Kapazität betrachtet, deren Wert von der angelegten Spannung abhängig ist. Die Verallgemeinerung auf eine temperaturabhängige Wärmekapazität ist dann trivial.

Nichtlineare elektrische Kapazität

Zur Modellierung spannungsabhängiger Kapazitäten findet man in der Literatur leider kaum Informationen, deshalb werden hier die wesentlichen Zusammenhänge kurz zusammengefasst. Eine ausführlichere Diskussion mit einer experimentellen Verifikation der Simulationsergebnisse findet man in [81]. Weiter unten wird ausserdem eine Methode vorgestellt, mit welcher nichtlineare Kapazitäten als effiziente Näherung vom direkten Matrixsolver verwendet werden können.

Generell müssen die Werte C(u) aus Messungen, Rechnungen oder Datenblattinformationen verfügbar sein, um spannungsabhängige Kapazitäten zu modellieren. Da in der Literatur verschiedene Begriffe und Messmethoden für nichtlineare Kapazitäten auftreten, ist ein grundlegendes Verständnis der Zusammenhänge wichtig. Prinzipiell kann C(u)mit Hilfe einer Ladungsmessung, Energiemessung oder aufgrund des Kleinsignalverhaltens bestimmt werden.

Die integrale Gesamtkapazität ist definiert durch die gesamte Ladung des Kondensators per anliegender Spannung, $C_{\rm I} = q/u$. Mit dem elektrischen Strom als Ladungsänderung erhält man schliesslich

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(C_{\mathrm{I}}(u) \cdot u \right) = C_{\mathrm{I}}(u) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u \frac{\mathrm{d}C_{\mathrm{I}}(u)}{\mathrm{d}t}$$
$$= \left(C_{\mathrm{I}}(u) + u \frac{\mathrm{d}C_{\mathrm{I}}(u)}{\mathrm{d}u} \right) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C_{\Delta}(u) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$
(4.22)

mit der differentiellen Kleinsignal-Kapazität

	Si	Al	Cu	AlN, Al_2O_3
$c_{\rm p}$ in J/(kg K), $T<77{\rm K}$	180	336	195	61
$c_{\rm p}$ in J/(kg K), $T>373{\rm K}$	770	937	397	910
Dichte ρ in $\rm kg/m^3$	2330	2800	2700	3970
Debye-Temperatur $T_{\rm D}$ in K	645	428	344	1150/980

$$C_{\Delta}(u) \equiv C_{\mathrm{I}}(u) + u \frac{\mathrm{d}C_{\mathrm{I}}(u)}{\mathrm{d}u} \,. \tag{4.23}$$

Tabelle 4.4: Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität für einige ausgewählte Materialien [81].

Die inverse Berechnung, also $C_{I}(u) = f(C_{\Delta}, u)$ bei gegebenem $C_{\Delta}(u)$, erhält man durch Auflösen von (4.23)

$$C_{\rm I} = \frac{1}{u} \int_{0}^{u} C_{\Delta}(u') \,\mathrm{d}u' \,. \tag{4.24}$$

Gleichung (4.23) zeigt, dass die gesamtladungsbasierte Definition der spannungsabhängigen Kapazität $C_{I}(u)$ sich von der Kapazität $C_{\Delta}(u)$ unterscheidet, welche man aus Kleinsignalmessungen erhält:

$$u(t) = u_0 + \hat{u}\sin\omega t \tag{4.25}$$

$$i(t) = C_{\Delta}(u_0) \cdot \omega \cdot \hat{u} \cos \omega t, \text{ mit } C_{\Delta}(u) = \frac{i}{\mathrm{d}u/\mathrm{d}t}.$$
(4.26)

Die Gesamtenergie, welche in einem Kondensator gespeichert ist kann mittels

$$E_C(U) = \int_T u(t) \cdot i(t) \, \mathrm{d}t = \int_T u(t) \cdot C_\Delta(u) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^U u \cdot C_\Delta(u) \cdot \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} C_{\mathrm{er}} U^2 \qquad (4.27)$$

berechnet werden. Dies erlaubt die Definition einer (für einen Arbeitspunkt) konstanten energieäquivalenten Gesamtkapazität

$$C_{\rm er} = \frac{2}{U^2} \cdot \int_U u \cdot C_{\Delta}(u) \cdot du, \qquad (4.28)$$

welche in Datenblättern oft für die Ausgangskapazität C_{oss} von MOS-FETS angegeben ist, um eine vereinfachte Berechnung der ladungsabhängigen Schaltverluste zu ermöglichen. C_{er} kann anhand der spannungsabhängigen Kleinsignalkapazität $C_{\Delta}(u)$ nach (4.28) berechnet werden.

Abbildung 4.10 zeigt den typischen Verlauf einer spannungsabhängigen Kapazität $C_{oss} = C_{oss}(u)$. Der starke Abfall der Kapazität mit zunehmender Spannung ergibt sich bei Halbleitern dadurch, dass die Breite der Verarmungszone im sperrenden Halbleiter mit höherer Spannung wächst, somit ergibt sich ein virtueller Plattenkondensator mit zunehmendem Plattenabstand.



Abb. 4.10: Spannungsabhängigkeit der nichtlinearen Kapazität C_{oss} des Leistungs-MOSFETs IPB60R385CP von Infineon.

In einem Schaltungssimulator oder für thermische Modelle mittels FDM Simulation muss schliesslich die Kleinsignal-Zusammenhang (4.26) implementiert werden:

$$i = C_{\Delta}(u) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \,. \tag{4.29}$$

Wendet man zur Diskretisierung der Gleichung zum Beispiel eine Rückwärts-Differenz (Backward-Euler) an, so erhält man

$$i^{k} = C(u^{k}) \cdot \frac{u^{k+1} - u^{k}}{\Delta t},$$
 (4.30)

wobei $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ die verwendete Simulationsschrittweite ist. Der hier verwendete Kapazitätswert $C(u^k)$ ist derjenige aus dem jeweils vorherigen Simulationsschritt. Diese Näherung ist nötig, da das Potential u^{k+1} noch nicht berechnet wurde und damit unbekannt ist. Wie in Abschnitt 4.4 besprochen wurde, erhält man durch die Bestimmungsgleichungen der (thermischen) Schaltungskomponenten eine Matrixgleichung der Form

$$\boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\gamma} \qquad (\boldsymbol{Y}_{\mathrm{th}} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{\gamma}) , \qquad (4.31)$$

welche für jeden Zeitschritt t_k nach den Potentialen \boldsymbol{u} (Temperaturen \boldsymbol{T}) gelöst werden muss. Für rein lineare Komponenten kann die Matrix \boldsymbol{Y} zu Beginn der Simulation ein einziges Mal faktorisiert werden. Den Rechenzeitgewinn sieht man leicht ein, da für die Matrix-Faktorisierung

ein um mehrere Grössenordnungen höherer Aufwand nötig ist, als für die Rücksubstitutionen.

Da sich durch eine exakte Berücksichtigung nichtlineare Komponenten die Matrixeinträge kontinuierlich abhängig vom Potential u^k ändern, wäre hierfür nach jedem Zeitschritt eine Matrixfaktorisierung nötig, was eine wesentliche Vergrösserung des Simulationsaufwandes bedeuten würde. Die variablen Matrixeinträge einer nichtlinearen Kapazität sind hier

$$\Delta \alpha_i = -\Delta \beta_{ij} = \pm \left(\frac{C_\Delta(u^k)}{\Delta t}\right) \tag{4.32}$$

$$\Delta \gamma_i = -\Delta \gamma_j = \frac{C_\Delta(u^k)}{\Delta t} \left(u_i^k - u_j^k \right) \,. \tag{4.33}$$

Um den Simulationsaufwand in Grenzen zu halten, wird hier deshalb eine auf einem bestimmten Arbeitspunkt $C_{\rm op}$ basierende Näherung eingeführt, sodass eine Faktorisierung der Matrix nur selten – bei sich stark ändernden Potentialen bzw. Kapazitäten – nötig ist. Zu beachten ist hierbei, dass die Nichtlinearität bei geringen Abweichungen der Kapazität C_{Δ} von $C_{\rm op}$ immer noch korrekt wiedergegeben werden sollte. Ausserdem muss vor allem die Ladungserhaltung im System erzwungen werden, da die Simulation sonst falsche oder unsinnige Ergebnisse liefert, oder schlicht nicht konvergieren würde.

Wird in der Systemmatrix Y anstatt $C_{\Delta}(u^k)$ eine konstante Kapazität C_{op} verwendet, so kann die nichtlineare Eigenschaft der Kapazität näherungsweise auf die rechte Seite der Matrixgleichung (4.31), also in den Lösungsvektor γ geschrieben werden. Durch Einsetzen und Auflösen von (4.32) und (4.33) in die Matrixgleichung und anschliessende Reihenentwicklung nach C_{Δ}/C_{op} erhält man

$$\Delta \alpha_i = -\Delta \beta_{ij} = \pm \frac{C_{\rm op}}{\Delta t} \tag{4.34}$$

$$\Delta \gamma_i = -\Delta \gamma_j$$

= $\frac{C_{\rm op}}{\Delta t} \left(\phi_i^k - \phi_j^k \right) + i^k \cdot \left(1 - \frac{C_\Delta(u^k)}{C_{\rm op}} \right) ,$ (4.35)

wobei der zweite Term in (4.35) ein Korrekturterm ist, welcher die Nichtlinearität der Kapazität ausdrückt. Nachdem die Matrixgleichung (4.31)



Abb. 4.11: Entladekurve der nichtlinearen Kapazität $C_{\rm oss}$ aus Abbildung 4.10 für einen Widerstand $R = 1 \Omega$. Spannungsverlauf bei konstanter Anfangskapazität $C = C_{\rm oss}(u_0) = {\rm const}$ (grün), exakter Verlauf der Kurve nach (4.32) (rot) und (4.33), Näherung nach (4.35) bzw. (4.36) (blau), wobei die Zeitpunkte bei denen die Systemmatrix faktorisiert wurde durch ein Symbol gekennzeichnet sind; die Faktorisierungsschwelle war hierfür $C_{\Delta}/C_{\rm op} < 0.4, \Delta t = 10^{-8} {\rm sec.}$

mit (4.35) gelöst wurde, muss der Strom i^{k+1} mittels

$$i^{k+1} = \frac{C_{\rm op}}{\Delta t} \cdot \left[\left(\phi_i^{k+1} - \phi_j^{k+1} \right) - \left(\phi_i^k - \phi_j^k \right) \right] + i^k \left(1 - \frac{C_{\Delta}(u^k)}{C_{\rm op}} \right)$$
(4.36)

berechnet werden. Hierbei ist anzumerken, das die Kapazität anhand eines stückweise konstanten Arbeitspunktes $C_{\rm op}$ verwendet wird, der Korrekturterm auf der rechten Seite von (4.35) bezieht aber dennoch die Nichtlinearität als Näherung erster Ordnung in die Rechnung mit ein. Zusammen mit (4.35) und (4.36) erhält man ein konstistentes Gleichungssystem, in welchem die Ladungserhaltung strikt erfüllt ist.

Die verwendete Reihenentwicklung könnte auch erst mit der zweiten oder noch höheren Ordnung abgebrochen werden, wodurch man im Vergleich zur hier gezeigten Näherung einen weiteren geringen Genauigkeitsgewinn erhält. Der Konvergenzbereich von C_{Δ}/C_{op} vergrössert sich aber dadurch kaum, weswegen hier von Näherungen höherer Ordnung absehen wird.

Mithilfe von (4.35) und (4.36) kann man das nichtlineare Problem in einem Algorithmus beschreiben, dessen Laufzeit sich unwesentlich von derjenigen mit ausschliesslich linearen Komponenten unterscheidet. Eine rechen
intensive Matrixfaktorisierung ist nur dann nötig, falls
 $C_{\Delta}/C_{\rm op} \ll 1$ nicht mehr erfüllt ist.

Abbildung 4.11 zeigt die Entladekurve der Kapazität $C_{\rm oss}$ aus Abbildung 4.10 über einen Widerstand von $R = 1\,\Omega$. Der Kapazitätswert steigt mit kleiner werdender Spannung um mehrere Grössenordnungen an, was letztendlich zu einer verlangsamten Entladung führt. Die genäherten Simulationsergebnisse benötigen nur 10 Matrixfaktorisierungen gegenüber 1000 Faktorisierungen, falls die ursprünglichen exakten Gleichungen (4.32) und (4.33) verwendet würden.

4.7 Thermisches FDM Beispiel

Die wesentlichen Eigenschaften des FDM-basierten thermischen Solvers GeckoHEAT werden in diesem Abschnitt mittels eines Beispiels diskutiert. Die geometrischen Abmessungen und physikalischen Eigenschaften des Beispielmodells sind bewusst sehr einfach gehalten und entsprechen keiner existierenden Hardware. Das einfache Modell erlaubt dem Leser jedoch den einfachen Vergleich der hier gezeigten Simulationsergebnisse mit anderen Softwarewerkzeugen zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung, und kann damit als praktische Referenz dienen.

Reale Leistungsmodule haben ähnliche Abmessungen und Materialeigenschaften wie hier verwendet, jedoch ist der Lagenaufbau sehr viel komplexer und eine Vielzahl verschiedenster Materialien (Aluminium, Kupfer, Keramik, Aluminumoxid, Silizium, ...) kommt zum Einsatz. Der Hauptunterschied zum Beispielmodell ist jedoch nur, dass der Aufwand zur Modellerstellung für ein real existierendes Halbleitermodul wesentlich grösser ist.

Anhand des Modells aus Abbildung 4.12 werden weiter unten die Temperaturzeitverläufe, die Skalierung des Solvers mit steigender Knotenzahl und die benötigte Auflösung der Zelleneinteilung diskutiert. Später, in Kapitel 5, wird dasselbe Modell für eine Modellordnungsreduktion verwendet. Die geometrischen Abmessungen, Materialeigenschaften und Randbedingungen können aus Abbildungen 4.12, 4.13 und Tabelle 4.5 entnommen werden.



Abb. 4.12: Beispielmodell für eine thermische FDM-Simulation. Die physikalischen Eigenschaften und Längenangaben zum Modell können Tabelle 4.5 entnommen werden. Die Geometrie ist punktsymmetrisch zum Mittelpunkt aufgebaut. Als Wärmequellen werden 4 pulsförmige Leistungsrandbedingungen verwendet, die jeweiligen Pulsformen sind in Abbildung 4.13 zusammengefasst. An der Unterseite des Modells befindet sich als Wärmesenke eine Konvektionsrandbedingung mit $T_{\rm amb.} = 40$ °C.

			A ,	•			
	Pulslänge τ	Frequenz f	P ir		P_{\max}	Г	-
Chip 1	konstant	-					
Chip 2	$2\mathrm{ms}$	$50\mathrm{Hz}$				1	Mittelwer
Chip 3	$500\mu{ m s}$	$200\mathrm{Hz}$		Ţ	-		\rightarrow Zeit t
Chip 4	$200\mu{ m s}$	$200\mathrm{Hz}$			T = f	$-\overline{1}$	2010 0

Abb. 4.13: Definition der vier Wärmequellen im Modell aus Abbildung 4.12. Chip 1 hat eine konstante Wärmeleistung von $P_{\text{const}} = 50 \text{ W}$, die übrigen Quellen haben dieselbe die mittlere Leistung von 50 W, sind jedoch pulsförmig.

Block	Basisplatte (Aluminium)	Halbleitersockel
Wärmeleitfähigkeit λ	$235 \mathrm{W/_{m\cdot K}}$	400 W/m·K
Massendichte ρ	$2.7 \mathrm{g/cm^3}$	$8.0 { m g/cm^3}$
Wärmekapazität \boldsymbol{c}	900 J/kg·K	$385 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$
Anfangstemperatur	40 °C	40 °C
Diskretisierung	40x20x5	4x4x10
Zellenverteilung	linear	nichtlinear in g
Breite a, f	$100\mathrm{mm}$	$10\mathrm{mm}$
Länge b, i	$50\mathrm{mm}$	$10\mathrm{mm}$
Höhe c,g	$5\mathrm{mm}$	$2\mathrm{mm}$
Position d, h	$25\mathrm{mm}$	$10\mathrm{mm}$
Randbedingung	Basisplatte	Halbleitersockel
Тур	Konvektion	Wärmeleistung
Position	unten	oben
Länge x Breite	$50 \mathrm{x} 100 \mathrm{mm}$	$e = i = 7.5 \mathrm{mm}$
Eigenschaften	$h = 2 {\rm kW/m^2 K}, T_{\rm amb.} = 40 {\rm ^{\circ}C}$	Abbildung 4.13

Tabelle 4.5: Abmessungen und physikalische Eigenschaften des thermischen Beispielmodells aus Abbildung 4.12.


Abb. 4.14: Verläufe der mittleren Temperaturen der Chips des Modells aus Abbildung 4.12.

Die Simulationsergebnisse für das Modell sind in Abbildung 4.14 dargestellt. Die gezeigten Temperaturverläufe sind die über die Fläche der Randbedingungen gemittelten Werte. Durch die rechteck-pulsförmige Leistungseinspeisung ergeben sich näherungsweise exponentiell verlaufende Temperaturänderungen. Die Ergebnisse in Abbildung 4.14 zeigen, dass die Zeitkonstanten im Modell von einigen Millisekunden bis zu einer Sekunde variieren. In Halbleiter-Datenblättern wird deshalb häufig die thermische Sprungantwort mit logarithmischer Temperaturskala gezeigt. Eine entsprechende Simulation des Beispielmodells ist in Abbildung 4.15 dargestellt. Neben der thermischen Sprungantwort am Ort des beheizten Halbleiters sind die drei passiven Sprungantworten der benachbarten Chips ohne Wärmeeintrag dargestellt.

Aufgrund der geometrischen Distanz der drei benachbarten Messpunkte findet eine Erwärmung erst nach einer Zeit von ca. einer Sekunde statt. Der stationäre Zustand ist nach etwa 30 Sekunden erreicht, die entsprechende Temperaturverteilung des stationären Zustands ist in Abbildung 4.16 dargestellt.



Abb. 4.15: Thermische Sprungantwort des Beispielmodells. Die konstante Leistung von P = 50 W wird zur Speisung des Chips Nr. 1 verwendet (siehe hierzu auch Abbildung 4.16).

4.8 Skalierung und Solver-Performance

Die Skalierungseigenschaften und Rechengeschwindigkeit der Software GeckoHEAT wird im Wesentlichen durch die Matrixoperationen des Solvers Pardiso bestimmt. Tabelle 4.6 zeigt die Speicher- und Geschwindigkeitsdaten für verschiedene Modellgrössen. Es wurde wieder das Beispielmodell aus Abschnitt 4.6 verwendet, wobei die Zellenauflösung schrittweise erhöht wurde. Die LU-Faktorisierung muss für jede Simulation nur einmal bzw. bei Verwendung nichtlinearer Modelleigenschaften einige Male ausgeführt werden. Die Zeitbereichssimulation wurde mit k = 1000Zeitschritten durchgeführt, die gesamte Simulationsdauer erhält man damit als Summe der LU-Faktorisierungszeit und dem k-fachen der Zeit, die für eine Rücksubstitution benötigt wird. Sämtliche Benchmarks wurden auf einem Quad-Core i7-Prozessor mit einer Taktfrequenz von 2.6 GHz, 4 MB Cachegrösse und 8 GB Arbeitsspeicher durchgeführt.

Die Ergebnisse aus Tabelle 4.6 sind in einem doppelt-logarithmischen Graphen in Abbildung 4.17 zusammengefasst. Sowohl die Faktorisierung der Systemmatrix als auch die Rücksubstitution wachsen mit der Anzahl n der Gleichungen wie $\mathcal{O}(n \log n)$, wobei eine Matrix-Faktorisierung im



Abb. 4.16: Stationäre Temperaturverteilung, welche sich gemäss Abbildung 4.15 im Grenzfall $t \to \infty$ bei der Sprungantwort einstellt.

Anzahl	Eintr.	Eintr.	Faktoris.	LU Rück-	Speicher	Sim
Knoten	A	LU-Fakt.	Zeit in s	sub. in s	in MB	Zeit in s
5000	18E3	18E4	0.15	0.005	1.4	7
10000	38E3	68E4	0.34	0.015	5.1	18
26 000	10E4	2.4E6	0.9	0.031	18	36
60 000	22E4	4.7E6	2.8	0.072	35	85
150 000	57E4	26E6	12	0.22	200	246
210000	82E4	51E6	17	0.40	400	434

Tabelle 4.6: Auswertung der benötigten Rechenzeiten und des Speicherplatzbedarfs der FDM-Software GeckoHEAT bei zunehmender Modellgrösse.

Vergleich zu einer Rücksubstitution eine ca. 50-fach grössere Rechenzeit benötigt. Die Grösse der Systemmatrix selbst nimmt linear mit der Modellgrösse zu, während der Speicherbedarf der faktorisierten Matrix aufgrund des Fill-ins mit $\mathcal{O}(n^{1.5})$ zunimmt.

Für realistische Problemgrössen bis zu einigen 10⁵ Variablen sind sowohl die Rechengeschwindigkeit als auch der Speicherbedarf des Solvers akzeptabel. Da der Speicherbedarf schlechter skaliert als die Rechengeschwindigkeit ist dieser für sehr grosse Modelle die limitierende Grösse, was für einen direkten Solver in dieser Weise auch zu erwarten war. Pardiso hat für sehr grosse Probleme die Möglichkeit einer Out-of-Core-Berechnung, wobei die LU-Faktoren auf die Festplatte des Rechners ausgelagert werden. Dies würde die Simulationszeit jedoch aufgrund des langsamen Festplatten-Zugriffs um ein Vielfaches vergrössern.

4.9 Fehleranalyse

Die Modell-Diskretisierung der Finite-Differenzen-Methode findet sowohl in den Raumdimensionen statt, als auch in der Zeitdimension durch die Wahl der Simulationsschrittweite Δt . Hier soll anhand einfacher Fehlerabschätzungen gezeigt werden, dass der räumlich lokalisierte maximale Modellfehler der Zeitdiskretisierung und der FDM-Zellen jeweils dort am kritischsten ist, wo stark schwankende Randbedingungen vorliegen. Bei einem Leistungsmodul ist dies am Ort der Randbedingung des Halbleiterbauelements der Fall.

4.9.1 Fehlerabschätzung der Simulationsschrittweite

Betrachtet man die Zeitdiskretisierung eines thermischen FDM-Modells können zwei grundsätzliche Fehlerquellen unterschieden werden:

Bei einer minimalen Schrittweite Δt können Signale, z. B. die Schaltverluste eines Halbleiterschalters, nur bis auf eine Schrittweite genau diskretisiert werden. Beachtet man diese Granularität der Zeitschrittweite für die Randbedingungen, so kann zumindest die Gesamtenergie eines Wärmepulses genau eingehalten werden, falls beim letzten Zeitschritt des Pulses die momentane Leistung der Randbedingung entsprechend der Gesamtenergie gewichtet wird.



Anzahl n der Variablen/Gleichungen

Abb. 4.17: Auswertung der Simulationszeit und des Speicherbedarfs der Software GeckoHEAT und des Matrix-Solvers Pardiso für verschiedene Modellgrössen.



Abb. 4.18: Visualisierung des maximalen lokalen Abschneidefehlers des Integrationsalgorithmus, logarithmische Farbskala. Die Simulation wurde mit dem Crank-Nicolson-Verfahren und einer Schrittweite von $\Delta t = 10 \,\mu$ s durchgeführt.

Die zweite und unvermeidlichere Fehlerursache in der Zeitdimension ist der Abschneidefehler (Truncation Error) des Integrationsalgorithmus, d. h. der Fehler aufgrund der endlichen Ordnung und Genauigkeit der verwendeten Integrationsmethode. Eine relativ genaue Fehlerabschätzung würde man erhalten, indem man neben dem eigentlichen Zeit-Integrationsalgorithmus ein Verfahren höherer Ordnung verwendet und mit dem ursprünglichen Ergebnis vergleicht. In der Praxis wird üblicherweise die umgekehrte Richtung bevorzugt, d. h. der Zeitschrittfehler wird bezogen auf ein Verfahren niedrigerer Ordnung ermittelt. Ansonsten würde die Information des genaueren Verfahrens ungenutzt bleiben und damit Rechenkapazität verschwendet werden. Im Weiteren soll der lokalen Zeit-Diskretisierungsfehler für das Beispielmodell qualitativ und räumlich lokalisiert durch folgende Methode visualisiert werden:

Das explizite Verfahren (Forward-Euler) ist für die Simulation selbst aufgrund der Stabilitätseinschränkung (4.2) ungeeignet. Ein Vergleich des expliziten Verfahrens mit der eigentlichen Simulation lässt aber eine numerisch sehr effiziente Abschätzung des lokalen Fehlers zu. Der Aufwand für das explizite Verfahren ist lediglich eine Matrix-Vektor-Multiplikation, wobei natürlich die dünne Besetzung der Matrix vorteilhaft verwendet werden sollte. Die Instabilität des expliziten Verfahrens kommt hier nicht zur Geltung, denn es werden nur einzelne Zeitschritte mit einem impliziten Verfahren verglichen.

Da das explizite Verfahren eine Methode erster Ordnung ist, wird bei einem Vergleich mit einer Methode zweiter Ordnung (z. B. Crank-Nicolson) der tatsächliche Fehler geringer sein als die Fehlerabschätzung, was hier als obere Fehlerschranke ausreichend ist. Die Farbskala in Abbildung 4.18 zeigt den maximalen relativen lokalen Fehler im Simulationsmodell, wobei als Zeitschrittweite $\Delta t = 100 \,\mu$ s verwendet wurde.

Augenscheinlich ist, dass der lokale Fehler am Ort der Randbedingungen am grössten ist, wo sich schnell ändernde Transienten ergeben. Die Wärmeleitungsgleichung besitzt eine glättende Eigenschaft, was bedeutet dass sich kurzzeitige Wärmepulse beim Durchlaufen durch den Wärmeleiter aufgrund der im Modell auftretenden Dispersion ausglätten. Die minimal benötigte Simulationsschrittweite wird damit ausschliesslich durch die FDM-Zellen nahe der Wärmequelle bestimmt. Somit sind beim gegebenen Wärmeleitungsprofil für sämtliche Zellen nahe des Kühlkörpers wesentlich grössere Simulationsschrittweiten möglich, um dennoch ausreichend genaue Ergebnisse zu erhalten.

Dieser Sachverhalt zeigt, das im Gesamtmodell ein Grossteil des Berechnungsaufwandes aufgrund der über mehrere Grössenordnung variierenden Zeitkonstanten generiert wird. Ein ordnungsreduziertes thermisches Modell, wie es in Kapitel 5 vorgestellt wird, ist deshalb sinnvoll, da die unterschiedlichen Zeitkonstanten auf einige wenige Freiheitsgrade beschränkt werden.

4.9.2 Räumlicher Diskretisierungsfehler der FDM-Zellen

Neben dem Zeit-Diskretisierungsfehler der Simulationsschrittweite entsteht bei FDM-Modellen immer auch die Frage nach der nötigen räumlichen Auflösung der Simulationszellen. Für das Modell des Leistungsmoduls ist intuitiv klar, dass kleinere Zellunterteilungen am Ort der Halbleiter nötig sind, um die Simulationsgenauigkeit zu erhöhen. Insbesondere die stark pulsförmige Leistungseinspeisung, wie sie durch die Schaltverluste eines Schalters erzeugt werden, erfordert eine sehr feine Zellenaufteilung. Nachfolgend wird eine qualitative Abschätzung gegeben, wie gross die Schichtdicke einer vom Wärmestrom durchflossenen Lage des thermisch leitfähigen Materials sein muss, damit die Simulationsergebnisse noch sinnvoll sind.

Das FDM-Prinzip ist in Abbildung 4.19 für ein eindimensionales Modell gezeigt, wobei sich die gezeigte Abschätzung der Auflösung später ohne Einschränkung auf zwei- oder dreidimensionale Modelle erweitern lässt. Abbildung 4.19a zeigt eine *RC*-Kette der Länge 4 mit konstanten Werten $C = 10 \,\mu\text{F}$ und $R = 100 \,\Omega$ als Modell im Schaltungssimulator GeckoCIRCUITS. Die anregende Stromquelle ist pulsförmig mit der Amplitude 1 A (entsprechend Abbildung 4.13) wobei ein festes Tastverhältnis d = 0.05 für den Rechteck-Puls gewählt wurde ($\tau_{\text{puls}} = d/f$). Die Frequenz der Pulse ist für die drei gezeigten Graphen 4.19 c-e mit $f = 10 \,\text{Hz}, f = 50 \,\text{Hz}$ und $f = 100 \,\text{Hz}$ ansteigend gewählt.

Eine feinere räumliche Diskretisierung des Modells könnte man z. B. durch die Verdopplung der Anzahl der RC-Glieder erhalten, wobei sich die Werte der Widerstände R und Kapazitäten C dabei jeweils halbieren. In Abbildung 4.19 b) ist diese Verfeinerung für die ersten zwei Zellen ausgeführt, die entsprechenden Simulationsergebnisse sind in den Ergebnisgraphen blau dargestellt, Ergebnisse der ursprünglichen RC-Kette sind in rot gezeigt. Der Unterschied der Simulationsergebnisse ist näherungsweise der durch die Diskretisierung eingeführte Fehler, wobei für höhere Frequenzen die blaue Kurve selbst wieder leicht fehlerbehaftet ist. Man erkennt hier deutlich, dass das Ausgangssignal der Frequenzf = 10 Hz in beiden Modellen noch gut übereinstimmt, mit zunehmender Frequenz und abnehmender Pulsbreite wird der Auflösungsfehler jedoch grösser.

Eine einfache Abschätzung, ob ein Signal noch sinnvoll wiedergegeben werden kann, erhält man durch die Betrachtung der Zeitkonstanten. Für eine *RC*-Stufe in Modell a) erhält man $\tau = R \cdot C = 1$ ms, was



Abb. 4.19: Anregung einer RC-Kette mit pulsförmigen Signalen. Die Abbildungen c)-e) zeigen die simulierten Spannungen (Temperaturen) an den Eingangsknoten p und p_2 .

mit der jeweiligen Pulslänge von a
) $\tau_{\rm puls} = 5\,{\rm ms}$ b) $\tau_{\rm puls} = 1\,{\rm ms}$ und b
) $\tau_{\rm puls} = 0.5\,{\rm ms}$ verglichen werden muss. Sobald die Pulsbreite kleiner als die Zeitkonstante des RC-Gliedes wird, ist der Diskretisierungsfehler einer RC-Kette zu grossen Simulationsfehlern zurückzuführen.

Mathematisch gesehen ist der Durchlauf des Signals durch die *RC*-Kette eine Faltung, welche eine glättende Wirkung auf die Signalform hat. Dies bedeutet, dass die Zellenauflösung mit zunehmender Entfernung von der Wärmequelle gröber gestaltet werden kann, da das zunächst scharf definierte Signal beim Durchlaufen der Kette eine Dispersion erfährt und sich damit in einen breiteren, geglätteten Puls aufweitet.

Falls eine thermische Simulation im Vergleich zur Breite der Anregungspulse eine zu grosse Zeitkonstante aufweist, äussert sich dies zunächst dadurch, dass die Energie des Pulses auf ein zu grosses Volumen verteilt wird, d.h. die Transienten werden damit immer in der Amplitude zu gering ausfallen. Bemerkenswert ist, dass durch die *RC*-Modellierung zwar nur Signale bis zu einer gewissen Grenzfrequenz aufgelöst werden können, die Gesamtenergie als Mittelwert jedoch korrekt wiedergegeben wird. Der Software-Benutzer kann damit durch eine geeignete Wahl der Zellengrösse und einer entsprechenden Verfeinerung der Diskretisierung am Ort der Randbedingungen zwischen Simulationsgenauigkeit, Zeitauflösung und Modellgrösse abwägen.

Der Farbverlauf in Abbildung 4.20 zeigt für das vorher diskutierte Beispiel-Modell die entsprechenden Zeitkonstanten τ , wobei hier die thermischen Widerstände in Wärmeflussrichtung für die Berechnung von τ verwendet wurden. Durch eine gegen die Halbleiter-Randbedingungen zunehmende, nichtlineare Verfeinerung der Zellgrössen wird hier eine erhöhte Pulsauflösung erreicht. Die minimale Zelllagendicke ist für das gezeigte Modell 0.1 mm, woraus eine zeitliche Auflösung von $\tau \approx 100 \,\mu$ s resultiert.

Die heute üblichen Schaltgeschwindigkeiten von Leistungshalbleitern liegen oft unterhalb von 100 ns; um die dafür nötige Auflösung des Modells zu erreichen, muss die Zellenauflösung also um den Faktor 1000 auf 0.1 μ m vergrössert werden. Ob solch eine feine Modellauflösung dem Softwareanwender einen wesentlichen Nutzen bringt ist aus folgenden Gründen sehr fraglich, denn:

• Die Annahme einer zweidimensionalen (flächenhaften) Randbedingung zur Leistungseinspeisung wäre hier nicht mehr gegeben.



Abb. 4.20: Zeitliche Auflösung, welche sich aus der Diskretisierung der FDM-Zellen ergibt. Man beachte, das die Farbskala den negativen Zehnerlogarithmus der Zeitkonstanten τ in Sekunden angibt.

- Der Lagenaufbau des Halbleiters müsste sehr detailliert modelliert werden.
- Die Modellgrösse würde sehr stark zunehmen, zusätzlich müsste die Simulationsschrittweite verkleinert werden, der Mehraufwand und die resultierende Simulationsdauer würde unrealistisch gross werden.
- Letztendlich wäre ein Vergleich der Simulationsergebnisse mit Messergebnissen sehr schwer möglich, da z.B. Infrarotkameras eine beschränkte zeitliche Auflösung besitzen.

Der Fehler, welcher sich aus der endlichen Grösse der Simulationszellen ergibt, lässt sich nie vollständig vermeiden, und oft ist die korrekte Mittelwertsbetrachtung mit relativ groben FDM-Gittern völlig ausreichend. Der FDM-Anwender sollte sich jedoch immer der physikalischmathematischen Hintergründe und Fehlerursachen bewusst sein, um Fehlinterpretationen der Simulationsergebnisse zu vermeiden.

5 Modellordnungsreduktion

In den vorangehenden Kapiteln wurde die Implementierung von elektromagnetischen und thermischen Modellen detailliert besprochen, wobei sich herausgestellt hat, dass sich beide Simulationsdomänen über denselben Formalismus durch elektrische Netzwerke darstellen lassen. Im computergestützten Designprozess möchte der Entwicklungsingenieur die Informationen, welche durch die dreidimensionale Modellsimulationen gewonnen werden können, möglichst effizient innerhalb einer Schaltungssimulation verwenden. Die Schaltungssimulation selbst befindet sich eine Abstraktionsstufe über der 3D Simulation, da hier nicht die geometrischen Eigenschaften und Anordnungen der Bauteile relevant sind, sondern nur deren idealisiertes Verhalten.

Es wäre theoretisch möglich sowohl PEEC-Modelle als auch thermische FDM-Netzwerke direkt in den Schaltungssimulator einzubinden, da es sich mit den hier vorgestellten Ansätzen jeweils um allgemeine Netzwerke handelt. Vergleicht man jedoch die Grössenordnungen der involvierten Differentialgleichungen, wird sehr schnell deutlich, dass dies zu unrealistisch grossen Simulationszeiten führen würde:

In einer typischen Schaltungssimulation eines leistungselektronischen Konverters werden Simulationszeiten in der Grössenordnung von einer Sekunde bei einer Schrittweite von typischerweise 100 ns benötigt, woraus eine Anzahl der Zeitschritte von 10^7 folgt. Soll beispielsweise ein thermisches Modell mit 150 000 Knoten einbezogen werden, würde sich gemäss Tabelle 4.6 eine Gesamtsimulationszeit von 7 Jahren ergeben. Durch eine variable Anpassung der Schrittweite Δt , bzw. eine Trennung der Zeitschritte des thermischen Solvers und des Schaltungssimulators wäre eine Reduktion der Rechenzeit um ein bis zwei Grössenordnungen möglich. Dies ändert aber nichts an der Tatsache, dass die Anzahl der Systemvariablen exorbitant gross ist. Ähnliche Verhältnisse ergeben sich bei einer kombinierten Modellierung der elektromagnetischen (parasitären) Layout-Eigenschaften, wobei die dichtbesetzten Matrizen der PEEC-Methode selbst bei kleineren Modellen mit einigen 1000 Variablen zu Simulationszeiten von vielen Jahren führen würden.

Auf der Abstraktionsstufe der leistungselektronischen Schaltungssimulation sind viele Informationen, welche aus der 3D-Simulation resultieren, jedoch nicht relevant. Der exakte Stromverlauf innerhalb einer Busbar-Verschienung oder der räumlich aufgelöste Wärmestrom innerhalb eines Leistungsmoduls spielen für das Gesamtsystem keine grosse Rolle. Vielmehr wird die Kenntnis des grundsätzlichen thermischen oder elektrischen Verhaltens der dreidimensionalen Geometrie an einigen ausgewählten Punkten von Interesse sein. Aus diesem Grund wird im Weiteren die mathematische Modellordnungsreduktion linearer Netzwerke behandelt.

Das Ziel der Modellordnungsreduktion (MOR) ist, unnötige Informationen aus linearen Systemen zu entfernen, was mit einer Reduktion von Freiheitsgraden in den Differentialgleichungen um mehrere Grössenordnungen einher geht. Welche Information im System relevant oder vernachlässigbar sind, wird durch den Softwareanwender dadurch festgelegt, dass räumlich definierte Punkte (Ports) im Modell definiert werden, deren Eigenschaften (Sprungantworten, Impedanzen oder Zeitkonstanten) derjenigen aus dem Originalmodell sehr nahe kommen. Für thermische Modelle wären die Ports z.B. die Randbedingungen, über welche Energie in das Modell eingespeist oder abgeführt wird. Für elektromagnetische Modelle entsprechen die Ports den räumlichen Anschlusspunkten der diskreten Schaltungskomponenten. Die Verbindung des ordnungsreduzierten Modells mit einem Schaltungssimulator, z.B. der Software GeckoCIRCUITS findet ausschliesslich über die gewählten Ports statt, alle weiteren Informationen innerhalb des 3D-Modells sind damit nicht mehr zugänglich.

Die hier vorgestellten Methoden sind schon seit einigen Jahren bekannt, werden aber in der Alltagspraxis der Leistungselektronik und der entsprechenden Simulationssoftware noch nicht vollumfänglich verwendet. Ein möglicher Grund dafür ist, dass die vorgestellten Konzepte abstrakt und teils sehr mathematisch sind. Deshalb soll hier versucht werden, die nötigen Konzepte möglichst anschaulich darzustellen, wobei allerdings auf ein gewisses Mass an mathematischem Formalismus nicht verzichtet werden kann.

Der Aufbau dieses Kapitels ist wie folgt: Zunächst wird eine kurze Übersicht der heute gebräuchlichen Algorithmen zur Modellordnungsreduktion gegeben und es werden deren Vor- und Nachteile diskutiert. Darauf wird detailliert auf die sogenannten Krylov-Unterraumverfahren eingegangen, welche direkt auf die Systemmatrizen der FDM und PEEC- Methode angewendet werden. Es wird abschliessend anhand von Beispielen gezeigt, dass sich durch die Verkettung zweier verschiedener Ordnungsreduktionsverfahren optimale Ergebnisse in Bezug auf die Modellgrösse und Effizienz der Ordnungsreduktion ergeben.

5.1 Modellordnungsreduktionsverfahren – eine Übersicht

5.1.1 Einfache Kurven-Approximationsverfahren

Die wohl einfachste Methode um 3D-Feldsimulationen in einer Schaltungssimulation zu verwenden, ist eine einfache Approximation der Simulationsergebnisse. Dabei können entweder Übertragungsfunktionen im Frequenzbereich oder Sprungantworten im Zeitbereich durch ein vereinfachtes Ersatznetzwerk derart angenähert werden, dass sich über einen bestimmten Zeit- oder Frequenzbereich nur eine geringe Abweichung zwischen der Feldsimulation und dem generierten vereinfachten Ersatznetzwerk ergibt.

Für parasitäre induktive Schaltungseigenschaften ist es oft ausreichend, eine Kommutierungsinduktivität mithilfe eines PEEC-Solvers zu berechnen, welche dann als diskretes Bauteil in die Schaltungssimulation übernommen werden kann, d. h. die Ordnungsreduktion findet hier "von Hand" statt, wie z. B. in [82], [83] und [46]. Eine solche Modellierung ist jedoch von der Intuition des Entwicklers abhängig, der durch die Wahl des Ersatznetzwerkes die Qualität der Approximation stark beeinflusst.

Bei dieser nicht-automatisierten Vorgehensweise besteht schon bei relativ einfachen Modellen die Gefahr von groben Modellierungsfehlern. So ist z. B. ein aus der PEEC-Methode gewonnenes Induktivtätsnetzwerk nur dann physikalisch sinnvoll, falls der physikalische Abstand der Ports klein ist im Vergleich zur Abmessung der Schaltung. Sollen in einem elektromagnetischen Modell mehrere Strompfade berücksichtigt werden, so müssen sämtliche Kopplungsinduktivitäten vorzeichenrichtig in die Schaltungssimulation übernommen werden. Der Softwareanwender kann oft nicht a priori abwägen, welcher Detaillierungsgrad im Ersatznetzwerk nötig ist, um schliesslich die dominierenden Eigenschaften korrekt zu modellieren. Der grösste Nachteil dieses unsystematischen Ansatzes ist jedoch, dass die benötigte Arbeitszeit zur Modellerstellung viel zu gross wird. Dies gilt insbesondere, falls mehrere Designalternativen untersucht, und auf ihre Vor- und Nachteile getestet werden sollen.

5.1.2 Thermische Foster- und Cauer-Ersatznetzwerke

Im Falle der kombinierten elektrischen Simulation einer Schaltung und deren thermischen Verhaltens hat sich die Erstellung von vereinfachten Netzwerken in der Leistungselektronik bereits etabliert. Einer der ersten Ansätze, das thermische Netzwerk durch ein Foster-Kette von parallelen RC-Gliedern zu modellieren, stammt aus dem Jahre 1959 [84], und wird bis heute in gleicher Weise durchgeführt. Abbildung 5.1 zeigt ein Foster-Netzwerk mit einer Leistungsquelle $P_{\rm s}(t)$ am Eingang und einer Temperatur $T_{\rm amb}$ als Wärmesenke am Ende des Netzwerks. Die Attraktivität der Foster RC-Netzwerke liegt in der einfachen Berechnung der Gesamtimpedanz des grau unterlegten Blocks in Abbildung 5.1

$$Z_{\rm th}(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{1 + sR_iC_i} \,. \tag{5.1}$$

Die Zeitkonstanten $\tau_i = R_i C_i$ des Netzwerks werden jeweils einzeln durch die *RC*-Paare bestimmt. Transformiert man (5.1) in den Zeitbereich, erhält man als Sprungantwort der eingespeisten Wärmeenergieleistung $P(t) = P_0 \Theta(t)$ eine Summe von Exponentialfunktionen

$$T_{\rm s}(t) = T_{\rm amb} + P_0 \sum_{i=1}^n R_i \left(1 - e^{-t/R_i C_i} \right) , \ t > 0 \,. \tag{5.2}$$

Betrachtet man mehrere Wärmequellen welche einen thermischen Kontakt besitzen, kann aufgrund des Superpositionsprinzips für jede ein-





zelne Quelle, sowie der jeweiligen Kopplung, ein Ersatznetzwerk erstellt werden. So kann z. B. für ein Halbleitermodul mit mehreren Schaltern und Dioden eine thermische Kopplungsmatrix erstellt werden. Jeder Matrixeintrag stellt eine thermische Impedanz $Z_{\text{th},ij}$ dar, wobei die Diagonalelemente der Matrix die Eigenerwärmung abbilden, Nebendiagonalelemente modellieren die gegenseitige Erwärmung benachbarter Halbleiter.

Foster-Netzwerke sind aufgrund der einfachen mathematischen Struktur sehr leicht zu erstellen und zu parametrisieren. In [85] wird eine einfache graphische Methode zur Parametrisierung gezeigt; die dafür benötigten thermischen Sprungantworten eines Halbleiter-Bauelements können entweder aus Datenblättern, experimentellen Messungen oder 3D-Feldsimulationen gewonnen werden. Dieser Modellierungsprozess wurde in der Schaltungssimulationssoftware GeckoCIRCUITS implementiert und automatisiert. Durch geschickt gewählte Näherungen der dabei entstehenden Matrixgleichungen lassen sich selbst sehr komplexe Netzwerke mit z.B. 36 Wärmequellen und deren Verkopplung [80] mit einem vernünftigen Rechenaufwand lösen.

Der schwerwiegendste Nachteil der thermischen Modellierung mittels Foster-Netzwerken ist, dass es sich bei dieser Methode um eine reine Nachbildung der Signalverläufe und der Eingangsimpedanz der Wärmequelle handelt. Es ist sehr wichtig zu verstehen, dass die Foster-Netzwerke keinerlei Verbindung mit den tatsächlichen physikalischen Vorgängen der Wärmeleitung besitzen. Dies äussert sich darin, dass ausser dem Eingangsknoten kein weiterer Knoten im Netzwerk sinnvolle Temperaturwerte wiedergibt. Anhand Abbildung 5.1 sieht man leicht ein, dass die Reihenfolge der RC-Glieder willkürlich ist. Selbst der (Wärme-) Strom am Ausgangsknoten ist unphysikalisch, da dieser dem Strom am Eingangsknoten entsprechen muss. Demnach stellt ein Foster-Modell eine einpolige Näherung einer Impedanz dar. Man kann das in Abbildung 5.1 so veranschaulichen (gestrichelte Box), dass der Ausgangsknoten und die daran angeschlossene Umgebungstemperatur $T_{\rm amb}$ mitsamt der Erdung im Modell mit eingeschlossen ist.

Für die Verwendung dieser Modelle sollte daher streng beachtet werden, dass jede Änderung des Netzwerks, wie beispielsweise das Hinzufügen eines thermischen Widerstandes, welcher einen Kühlkörper modellieren soll, unsinnig ist. Foster-Modelle sollen und können nur für den im Speziellen generierten Anwendungsfall verwendet werden.



Abb. 5.2: Thermisches Cauer-Netzwerk, zur physikalischen Modellierung des thermischen Verhaltens von Leistungshalbleitern.

Um die Beschränkungen der unphysikalischen Foster-Netzwerke zu umgehen, wird oft alternativ die Cauer-Struktur aus Abbildung 5.2 zur Modellierung verwendet. Cauer-Netzwerke haben eine starke Ähnlichkeit zur Finite-Differenzen-Modellierung (siehe Abbildung 4.2 und Kapitel 4), und lassen damit eine physikalische Interpretation der internen Knoten zu, d. h. interne Cauer-Knoten können tatsächlich existierenden Temperaturwerten zugeordnet werden. Im Gegensatz zur einpoligen Näherung der Foster-Netze ist ein Cauer-Netz damit ein echter Zweipol, und auch der resultierende Wärmestrom am Ausgang ist physikalisch sinnvoll.

Die Schwierigkeit der Cauer-Netzwerke ist, dass die im System auftretenden Zeitkonstanten nicht auf wenige Bauteile konzentriert sind, sondern es werden sämtliche Zeitkonstanten des Netzwerks durch jede einzelne Komponente R und C beeinflusst. Daher wird die Parametrisierung von R_i und C_i aus einer Messung der thermischen Sprungantwort oder einer transienten Simulation wesentlich erschwert.

In der Literatur wird deshalb vorgeschlagen, aus den thermischen Sprungantworten zunächst ein Foster-Modell zu parametrisieren [86], um daraus anschliessend ein physikalisches Cauer-Modell zu erzeugen. Tatsächlich kann durch rein mathematische Umformungen (Cauer-Synthese) aus jedem Foster-Netzwerk ein dazu eindeutig äquivalentes Cauer-Netzwerk generiert werden [87], [88]. Der umgekehrte Weg vom Cauer-Modell zur Foster-Kette erfolgt über eine einfache Partialbruchzerlegung. Es ist jedoch fragwürdig, ob solch eine Vorgehensweise sinnvolle physikalische Modelle generiert, da der Weg über die rein signaltechnischen Foster-Modelle keinerlei Informationen über die geometrischen und physikalischen Eigenschaften des Modells beinhaltet.

In [89] wird der Zusammenhang zwischen eindimensionaler Wärme-

leitung und deren Repräsentation in Cauer- und Foster-Netzwerken ausführlich diskutiert, und eine Interpretation der aus dieser Methode resultierenden Cauer-Modelle mit Messergebnissen gezeigt. Die Zuordnung der Knoten im Cauer-Modell wird hier durch eine nachträglich gemessene örtliche Temperaturverteilung in der Hardware durchgeführt. Ohne eine entsprechende räumlich aufgelöste Messung, also alleine durch die Verwendung der Daten der transienten Sprungantwort, lässt sich eine solche physikalische Zuordnung nicht sinnvoll durchführen.

In [86] wird vorgeschlagen, dass über den Umweg der mathematischen Transformation der Netzwerke eine Hintereinanderschaltung von Foster-Netzwerken möglich ist: Ein Transistorgehäuse, dessen thermisches Verhalten durch ein Foster-Netzwerk angegeben ist, soll mit dem Modell eines Kühlkörpers gekoppelt werden. Dafür werden beide Netzwerke in ein Cauer-Modell umgewandelt, kombiniert und das Gesamtmodell schliesslich für eine vereinfachte Berechnung wieder zurück in eine Foster-Repräsentation umgeformt. Hier wird gezeigt, dass sich im Vergleich zu den erhaltenen Simulationsergebnissen ein grober Modellfehler ergibt, falls die ursprünglichen Foster-Modelle direkt kombiniert werden würden.

Eine solche Vorgehensweise ist mit grosser Vorsicht und sehr kritisch zu betrachten, denn es kann nicht garantiert werden, dass die räumlich/physikalisch gegebene Information über die gezeigte Umwandlung einwandfrei zurückgewonnen wird. Lediglich der gesamte thermische Widerstand wird korrekt wiedergegeben, wie es bei der Kombination von Foster-Modellen auch schon der Fall ist. Dynamische (transiente) Vorgänge sind aber auch mit den gezeigten Umformungen nicht einwandfrei zu modellieren.

Aufgrund der bisher gezeigten Schwierigkeiten und Schwächen einer einfachen Netzwerk-Repräsentation wird im Folgenden dargestellt, wie eine Modellordnungsreduktion rein mathematisch generiert werden kann, wobei die Grundlage hierfür vollständige dreidimensionale Feldsimulationen sind. Da sowohl die PEEC-Methode als auch das Finite-Differenzen-Verfahren auf ähnliche Differentialgleichungssysteme führen, können die Methoden gleichermassen auf elektrische sowie thermische Modelle angewandt werden. Im Sinne der Vollständigkeit dieser Übersicht werden zunächst drei prinzipiell unterschiedliche Methoden erläutert. Die in dieser Arbeit schliesslich verwendete Methode ist die Krylov-Unterraummethode, worauf in Abschnitt 5.2 detailliert eingegangen wird.



Abb. 5.3: Knoten-Elimination nach dem TICER-Verfahren: Durch eine verallgemeinerte Y- Δ -Transformation kann das ursprüngliche Netzwerk a) in eine äquivalente Dreieck-Schaltung b) umgeformt werden. Hieraus wird ein vereinfachtes (genähertes) Netzwerk c) generiert.

5.1.3 Modellordnungsreduktion durch Netzwerkumformungen

Ein sehr intuitiver Ansatz für eine mathematisch basierte Modellordnungsreduktion ist die direkte Umformung der zugrundeliegenden Netzwerke. Dies hat den Vorteil, dass das ordnungsreduzierte Modell selbst auch ein Netzwerk diskreter Komponenten darstellt, und damit auch stabil und passiv ist. Das in [90] entwickelte Verfahren TICER (Time Constant Equilibration Reduction) wurde ursprünglich für die Modellierung der Verbindungsstrukturen auf integrierten Schaltungen entwickelt und ist auf *RC*-Netzwerke beschränkt. Da die FDM reine *RC*-Netze erzeugt, ist TICER aber auch hierfür prinzipiell geeignet. Das Grundprinzip von TICER ist in Abbildung 5.3 dargestellt: Durch eine Y- Δ -Transformation kann ein Knoten im Netzwerk in eine Dreieck-Schaltung transformiert werden. Die resultierenden Admittanzen werden dabei zu

$$\tilde{y}_{ij} = \frac{y_i y_j}{\sum y_i} = \frac{(R_i^{-1} + sC_i)(R_j^{-1} + sC_j)}{\sum (R_i^{-1} + sC_i)}$$
(5.3)

berechnet. Entwickelt man (5.3) in Reihe und vernachlässigt Terme höher Ordnung in s, so kann man im Δ -Netzwerk die genäherte Admittanz

$$\hat{y}_{ij} = \frac{1}{R_i R_j \sum R_i^{-1}} + s \left(\frac{C_i / R_i + C_j / R_i}{\sum C_i} - \frac{\sum C_i}{R_i R_j \left(\sum R_i^{-1} \right)^2} \right)$$
(5.4)

verwenden. In der ursprünglichen TICER-Methode [90] wurde dabei noch der letzte Term in (5.4) vernachlässigt [91]. Mit dieser Umformung wurde der Knoten N aus Abbildung 5.3 entfernt und das Modell somit verkleinert. In der Praxis lässt sich dieser Prozess durch eine geeignete Software automatisieren.

Ein wesentlicher Bestandteil des TICER Algorithmus ist dabei die Selektion der zu eliminierenden Knoten. Dies kann durch die Betrachtung der Zeitkonstanten der Knoten im Netzwerk geschehen, sodass sehr langsame und sehr schnelle Knoten sukzessive entfernt werden. Ein weiteres Kriterium zur Auswahl der Knoten ist, zunächst diejenigen Knoten mit einer möglichst geringen Anzahl von Verbindungen zu eliminieren. Die Elimination von Knoten, welche als Port dienen, ist nicht gestattet. Für weiter Details sei auf [90] verwiesen.

Ein ähnliches Verfahren zur Elimination von Induktivitäten innerhalb von *RCLM*-Netzwerken ist in [91] gegeben. Dabei werden eliminierte Kopplungsinduktivitäten teilweise durch negative Kapazitäten ersetzt; die Komplexität des Algorithmus und der damit verbundene numerische Aufwand ist aber höher als bei TICER.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde TICER für thermische FDM-Modelle realisiert. Es hat sich jedoch gezeigt, dass die anfängliche Anzahl der Kopplungen der FDM-Zellen (typischerweise 6 bei dreidimensionalen Modellen) zu gross ist, um Modelle wesentlich zu reduzieren. Bei jeder Knoten-Elimination steigt die Anzahl der Verbindungen der übriggebliebenen Zellen zu den involvierten Nachbarzellen an: Sämtliche Zellen, die ursprünglich mit dem zu eliminierenden Knoten verbunden sind, werden nach dem Eliminationsschritt zum direkten Nachbar der verbliebenen Zellen. Dies zerstört letztendlich die dünne Besetzung der Systemmatrix; ein direkter Matrix-Solver für dünn besetzte Matrizen wäre damit nicht mehr sinnvoll einsetzbar.

Ähnliches gilt für elektromagnetische PEEC-Modelle, wobei hier zusätzlich die anfänglich dicht besetzte Induktivitätsmatrix L und die Potentialkoeffizientenmatrix P eine Knoteneliminiation verhindern. Die Knoteneliminiationsverfahren sind deshalb nur bedingt zur Reduktion feldsimulationsbasierter Netzwerke geeignet; das Einsatzgebiet beschränkt sich damit auf die Reduktion von fast-linearen Ketten diskreter Netzwerke.

5.1.4 TBR-basierte Modellordnungsreduktion

Mathematische Algorithmen zur Modellordnungsreduktion basieren, abgesehen von den vorher besprochenen Verfahren, entweder auf dem Krylov-Unterraum Projektionsverfahren oder alternativ auf der Singulärwertzerlegung (Singular-Value-Decomposition, SVD). Der Schwerpunkt diese Arbeit liegt auf der Anwendung von Krylov-basierten Verfahren. Der Vollständigkeit halber sollen die SVD-basierten Verfahren kurz erläutert werden. Eine ausführliche Übersicht hierfür findet man z. B. in [92], [93] oder [94], wobei die hier gegebene Zusammenfassung inhaltlich auf [94] basiert.

Der Ursprung der SVD-basierten Methoden liegt in der System- und Regelungstheorie [95]. Der grundlegende mathematische Ansatz ist, dass die Systemzustände, welche gleichzeitig schwer zu erreichen und schwer messbar sind, aus dem System entfernt werden können ohne dass dabei ein grosser Modellfehler eingeführt wird.

Ein anschauliches Beispiel für einen schwer erreichbaren und schwer messbaren Systemzustand kann anhand Abbildung 5.2 gegeben werden: Hier ist beispielsweise eine positiv- und negativ alternierendes Potential der Knoten schwer erreichbar, da das System nur durch die zwei Ports am Ein- und Ausgangsknoten der Cauer-Kette anregen lässt. Potentialsprünge werden durch die RC-Kette geglättet, so dass ein solcher Zustand schwer erreichbar ist. Ebenfalls ist durch die alleinige Messung des Systemzustands an den Ports schwer festzustellen, dass solch ein Systemzustand vorliegen könnte.

Die gebräuchlicheste SVD-basierte Methode ist das Verfahren des balancierten Abschneidens (Truncated Balanced Realization, TBR); diese wird wie folgt durchgeführt: Zunächst wird das System von der ursprünglichen Basis in eine neue Basis transformiert, in der die Systemvariablen nach ihrer Erreichbarkeit und Messbarkeit sortiert sind. Schliesslich werden die schwer erreichbaren Systemvariablen abgeschnitten, bzw. im ordnungreduzierten Modell vernachlässigt. Die Basistransformation und Sortierung der Systemvariablen basiert auf der SVD, welche für eine $m \times m$ -Matrix M eine Faktorisierung der Form

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\,,\tag{5.5}$$

erzeugt, wobei U und V^{T} jeweils orthogonale $m \times m$ Matrizen sind. Σ ist eine Rechteck-Matrix, deren Diagonaleinträge $\sigma = \operatorname{diag}(\Sigma)$ die Singulärwerte von M darstellen. Die Singulärwerte sind die Quadratwurzeln der Eigenwerte $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(M^{\mathrm{H}}M)}$ der symmetrisch positivdefiniten Matrix $M^{\mathrm{H}}M$. Üblicherweise werden die Singulärwerte in Σ der Grösse nach geordnet angegeben.

Ein allgemeines lineares dynamisches System ist durch die Zustandsraumdarstellung

$$E\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{F}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

(5.6)

gegeben. Man beachte, dass die Finite-Differenzen-Methode 4.11 und die PEEC-Methode (2.10) genau solche Systeme erzeugen. Die Matrix \boldsymbol{E} beinhaltet die Energiespeicher, \boldsymbol{G} die Leitfähigkeiten, \boldsymbol{F} und \boldsymbol{C} sind die Eingangs- und Ausgangsmatrizen des Systems. Der Vektor $\boldsymbol{u}(t)$ und die zweite Gleichung aus (2.10) stellen jeweils die Ein- und Ausgänge des Systems dar. Typischerweise sind für *RLC*-Modelle die Ein- und Ausgänge identisch, womit $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ gilt. Durch Multiplikation mit \boldsymbol{E}^{-1} und $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{G}, \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{F}$ erhält man die Zustandsraumdarstellung

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) .$$
 (5.7)

Die TBR-Methode soll folgendes Ziel verfolgen: Aus dem Gleichungssystem (5.6) soll ein verkleinertes (ordnungsreduziertes) System

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t)
\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$
(5.8)

erzeugt werden, dass für gleiche Eingänge $\boldsymbol{u}(t)$ ähnliche Ausgangswerte $\boldsymbol{y}(t) \approx \tilde{\boldsymbol{y}}(t)$ erzeugt. Die $\delta(t)$ -Impulsantwort des Systems (5.6) ist gegeben durch

$$\boldsymbol{h}(t) = \boldsymbol{C} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{B} \,. \tag{5.9}$$

Dies kann man sich in zwei getrennte Vorgänge aufgespaltet vorstellen: $\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}$ stellt die Abbildung des Eingangsvektors $\boldsymbol{u}(t) = \delta(t)$ in die Zustandsvariable $\boldsymbol{x}(t)$ dar, die Relation von Zustandsvariablen zu den Ausgängen ist $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{x}(t)$, mit $\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{C}e^{\boldsymbol{A}t}$. Das alleinig durch die Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}(0)$ verursachte Ausgangsignal ist damit $\boldsymbol{y}_0(t) = \boldsymbol{\eta}(t)\boldsymbol{x}(0)$ [93]. Ob Zustände im System durch eine externe Anregung erreichbar (e), oder ein Messergebnis am Ausgang aufgrund eines internen Zustandes $\boldsymbol{x}(t)$ messbar (m) sind, wird in der Regelungstechnik durch die Auswertung der Gram'schen Matrizen

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{e}} = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{B} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t} \,\mathrm{d}t \qquad (5.10)$$

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{m}} = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \,\mathrm{d}t \qquad (5.11)$$

untersucht, wobei die Integranden jeweils die inneren Produkte der Eingangs- und Ausgangsrelationen sind. Ein System wird als balanciert bezeichnet, falls die Gram'schen Matrizen $\boldsymbol{W}_{\rm e}$ und $\boldsymbol{W}_{\rm m}$ identisch sind und Diagonalmatrizen darstellen. Durch eine geeignete Basistransformation \boldsymbol{T} , mit $\tilde{\boldsymbol{W}}_{\rm e} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{W}_{\rm e}\boldsymbol{T}^{\rm T}$ und $\tilde{\boldsymbol{W}}_{\rm m} = \boldsymbol{T}^{-{\rm T}}\boldsymbol{W}_{\rm m}\boldsymbol{T}^{-1}$ kann man jedes System (5.6) so transformieren, dass in dieser Basis die Gram'schen Matrizen $\tilde{\boldsymbol{W}}_{\rm e}, \tilde{\boldsymbol{W}}_{\rm m}$ balanciert sind [93, 94].

Die Eigenwerte $\lambda_i(\boldsymbol{W}_{e}\boldsymbol{W}_{m})$ der Matrix $\boldsymbol{W}_{e}\boldsymbol{W}_{m}$ werden als Hankel-Singulärwerte bezeichnet, und beinhalten die Information, ob Zustände des Systems leicht erreichbar oder messbar sind. Die Berechnung der Gram'schen Matrizen erfolgt über die Lyapunov-Gleichungen

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{W}_{e} + \boldsymbol{W}_{e}\boldsymbol{A}^{T} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{T} = 0 \tag{5.12}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{o}} + \boldsymbol{W}_{\mathrm{o}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} = 0 \ . \tag{5.13}$$

Die Basistransformation zur Balancierung erhält man mit

$$T = L_{\rm e} V \Sigma^{-0.5}$$

$$T^{-1} = \Sigma^{-0.5} U^{\rm T} L_{\rm m}^{\rm T}, \qquad (5.14)$$

wobe
i $L_{\rm e}$ und $L_{\rm o}$ die unteren Cholesky-Faktoren der Gram's
chen Matrizen sind, und $\boldsymbol{L}_{\rm e}^{\rm T}\boldsymbol{L}_{\rm m}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\rm T}$ die Singulärwert-Zerlegung der Cholesky-Faktoren ist [94]. Für die Modellordnungsreduktion des Systems (5.6)

erhält man schliesslich

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{T}$$
$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{B}$$
$$\tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} \boldsymbol{T} \,.$$
(5.15)

Dieses System hat bis hierhin noch dieselbe Grösse wie das ursprüngliche Gleichungssystem (5.6) und stellt die exakte Lösung dar. Die eigentliche Reduktion erhält man durch Aufspalten der Matrizen Σ , \tilde{A} und \tilde{C} in kleinere quadratische Submatrizen der jeweiligen Grössen k und n-k, wobei Grössen der Singulärwerte $\sigma_i = \text{diag}(\Sigma)$ eine praktische Auskunft über die Genauigkeit der Approximation geben. Typischerweise sind die Werte σ_i stark abfallend und können ab einer gewissen k + 1 Schranke vernachlässigt werden. Das reduzierte System ist damit durch das Subsystem 1...k aus Gleichung (5.15) gegeben.

Die Vorteile des gezeigten Verfahrens sind:

- Es werden relativ kompakte ordnungsreduzierte Modelle erstellt, was mit einer guten Qualität der Reduktion gleichzusetzen ist: Das resultierende Gleichungssystem ist in Bezug auf dessen Grösse und des daraus resultierenden Fehlers optimal.
- Über die Singulärwerte σ_i kann die Qualität der Reduktion sehr gut abgeschätzt werden. Bei den später besprochenen Krylov-Unterraumverfahren ist im Gegensatz hierzu keine einfach zu berechnende Fehlerschranke bekannt.

Das wesentliche Problem aller SVD-basierten Ordnungsreduktionsverfahren ist, dass der numerische Aufwand extrem gross ist. Die SVD hat eine numerische Komplexität von $\mathcal{O}(m^3)$. Zur Lösung der Lyapunov-Gleichung müssen $m \times m$ Matrixeinträge der Gram'schen Matrizen berechnet werden, was ebenfalls einen Rechenaufwand von $\mathcal{O}(m^3)$ erfordert. Damit ist das TBR-Verfahren zur direkten Anwendung auf die ursprünglichen Systemmatrizen nicht geeignet. Aus diesem Grund werden in den nächsten Abschnitten projektionsbasierte Ordnungsreduktionsverfahren vorgestellt, welche im Vergleich zur balancierten Realisierung sehr viel effizienter sind.

Dennoch findet die TBR-Methode für diese Arbeit eine sinnvolle Anwendung. Die durch Krylov-Verfahren reduzierten Systeme sind zwar wesentlich kleiner als das ursprüngliche Gleichungssystem, die daraus entstehende Ordnungsreduktion ist aber nicht optimal; es ist möglich durch ein noch kleineres Gleichungssystem qualitativ ähnlich gute Näherungsergebnisse zu erzielen. Um die Qualität der Ordnungsreduktion zu verbessern wird das durch das Krylov-Verfahren reduzierte System in einem zweiten Schritt durch Anwendung des TBR-Verfahrens weiter reduziert. Dies ist deshalb sinnvoll, da die Zahl der Systemvariablen für die zweite Reduktion bereits so gering ist, dass das TBR-Verfahren mit $\mathcal{O}(\tilde{n}^3)$ innerhalb einer vernünftigen Zeit ausgeführt werden kann.

5.1.5 Asymptotic Waveform Evaluation

Das hier vorgestellte Verfahren mit dem Namen "Asymptotic Waveform Evaluation" (AWE) [96] bildet die Grundlage sämtlicher auf dem Krylov-Unterraumverfahren basierende Ordnungsreduktionen. Die eigentliche AWE-Methode kommt aufgrund numerischer Probleme nicht zum Einsatz; die Diskussion der Funktionsweise von AWE trägt aber wesentlich zum Verständnis des PRIMA-Algorithmus bei, wie er in Abschnitt 5.2 besprochen wird.

Wir gehen wieder von der Zustandsraumdarstellung (5.7) aus. Mittels Laplace-Transformation erhält man die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \boldsymbol{C} \left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{B}$$
(5.16)

wobe
i \boldsymbol{I} die Einheitsmatrix darstellt. Wir nehmen dabei vereinfachend an, dass das System nur einen Ein
- bzw. Ausgang besitzt, eine entsprechende Diskussion von Multi-Port-Modellen wäre jedoch ebenso möglich. Die Übertragungsfunktion kann durch eine gebrochen
rationale Funktion dargestellt werden, d. h.

$$H(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s - p_i} = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n}.$$
 (5.17)

Die Pole p_i entsprechen damit den Eigenwerten von A. Falls die Pole p_i und Residuen k_i von A bekannt sind, kann die Sprungantwort des Systems mit

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{p_i t}, t > 0$$
(5.18)

analytisch berechnet werden. Mit der AWE-Methode wird nun versucht, eine genäherte Übertragungsfunktion (Padé-Approximation)

$$\tilde{H}(s) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\tilde{k}_i}{s - \tilde{p}_i} = \frac{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 + \dots + \tilde{a}_{q-1}}{1 + \tilde{b}_1 s + \tilde{b}_2 s^2 + \dots + \tilde{b}_q s^q}$$
(5.19)

zu finden, wobei die Ordnung q viel kleiner ist als die ursprüngliche Modellordnung. $\tilde{H}(s)$ ist eine gute Näherung von H(s), falls die ersten 2q Momente der beiden Übertragungsfunktionen übereinstimmen. Die Momente der Übertragungsfunktion sind dabei über die Taylorentwicklung

$$H(s) = m_0 + m_1 s + m_2 s + \dots + m_n s^n = \sum_{i=0}^n m_i s^i$$
(5.20)

definiert. Die Momente der Transferfunktion können über die folgende Rekursion sehr einfach berechnet werden [96]:

$$x_{0} = -CB, m_{0} = Cx_{0}$$

$$x_{1} = A^{-1}x_{0}, m_{1} = Cx_{1}$$
...
$$x_{2q-1} = A^{-1}x_{2q-2}, m_{2q-2} = Cx_{2q-2}.$$
(5.21)

Die dabei auftretende inverse Matrix muss nicht explizit berechnet werden, eine einmalige Faktorisierung und Rücksubstitution in jedem Schritt der Berechnung ist numerisch stabiler und effizienter.

Um schliesslich die noch unbekannten Werte \tilde{a}_q und \tilde{b}_q zu berechnen muss, damit die ersten q Momente der Übertragungsfunktionen übereinstimmen,

$$\sum_{i=0}^{q-1} \tilde{a}_i s^i = \left(\sum_{i=0}^{2q-1} m_i s^i\right) \left(\sum_{i=0}^q \tilde{b}_i s^i\right)$$
(5.22)

erfüllt sein. Die Gleichung (5.22) ergibt, durch einen Koeffizientenvergleich in s^k ein Gleichungssystem der Grösse 2q, dessen Lösung die gesuchten Koeffizienten \tilde{a}_i und \tilde{b}_i sind. Aus der daraus folgenden Padé-Approximation $\tilde{H}(s)$ kann wieder ein Differentialgleichungssystem

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t)
\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$$
(5.23)

der Grösse q gewonnen werden, welches als Ordnungsreduktion das ursprüngliche Zustandsraummodell (5.7) ersetzt.

Die auf AWE basierende Modellordnungsreduktion ist sehr einfach und numerisch effizient durchzuführen. Es zeigen sich jedoch in der Anwendung auf RCL-Netzwerke folgende Probleme:

- Es kann vorkommen, dass AWE instabile ordnungsreduzierte Modelle generiert, d. h. das ursprünglich passive System H(s) wird in ein nicht-passives System $\tilde{H}(s)$ transformiert, wodurch es für die spätere Verwendung in einem Schaltungssimulator unbrauchbar wird.
- Die Momentberechnung ist numerisch instabil, wodurch Pole höherer Ordnung nicht mehr zuverlässig angenähert werden. In Gleichung (5.21) wird rekursiv eine Sequenz von Matrizen/Vektoren $A^{-1}x_0, A^{-2}x_0, \ldots, A^{-q+1}x_0$ verwendet. Man kann zeigen, dass diese Sequenz relativ schnell gegen den grössten Eigenvektor von A^{-1} mit dem kleinsten Eigenwert¹, bzw. gleichbedeutend gegen den Eigenvektor von A mit dem kleinsten Eigenwert konvergiert. Daraus kann geschlossen werden, dass AWE für kleine Eigenwerte/Pole eine relativ gute Näherung ergibt, Informationen der Pole höherer Ordnung gehen in der Matrixsequenz jedoch schnell verloren.

Dies äussert sich darin, dass maximal nur ca. 5-6 Pole zuverlässig verwendet werden können [94]. Näherungen höher Ordnung sind mehr und mehr mit Rundungsfehlern behaftet, sodass sie keinen weiteren Genauigkeitsgewinn erzeugen, und hierdurch wieder instabile Systeme generiert werden können.

Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wird im nächsten Abschnitt ein weiteres Moment-Anpassungsverfahren vorgestellt, das auf Krylov-Unterraummethoden basiert, und zusätzlich die Passivität der ordnungsreduzierten Modelle garantiert.

5.2 Krylov-Unterraum-Methode, PRIMA

Das sogenannte Krylov-Unterraumverfahren ist die Grundlage der meisten iterativen Solver [67], bei dem eine Sequenz von Vektoren durch eine wiederholte Matrix-Vektor-Multiplikation gewonnen wird. Auch beim AWE Verfahren ist bereits eine Sequenz von Matrizen/Vektoren aufgetreten, deren genauere Betrachtung sich lohnt. Ganz allgemein wird die

¹Falls A^{-1} diagonalisierbar ist, d. h. $A^{-1} = S\Lambda S^{-1}$ mit den Eigenwerten auf der Diagonale in Λ und den Eigenvektoren in S, so ist $x_k = A^{-q}x_0 = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\dots(S\Lambda S^{-1})x_0 = S\Lambda^q S^{-1}x_0$, was gegen den Eigenvektor mit dem grössten Eigenwert von A^{-1} konvergiert.

lineare Hülle einer Sequenz von Vektoren

$$\mathcal{K}_q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}) = \operatorname{span}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}, \dots, \boldsymbol{A}^{q-1}\boldsymbol{x})$$
(5.24)

als Krylov-Unterraum der Stufe q bezeichnet, wobei die Vektoren \boldsymbol{x} , $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ldots$ eine q-dimensionale Basis dieses Vektorraumes darstellen. Durch eine beliebige Basismatrix $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{q-1})$ kann jeder Vektor \boldsymbol{y} im Raum \mathcal{K}_q als eindeutige Linearkombination $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\alpha}_i$ von Basisvektoren dargestellt werden.

Das im vorherigen Abschnitt besprochene AWE-Verfahren verwendet demnach die Krylov-Sequenz (5.24) selbst als Grundlage für die Moment-Berechnung. Aufgrund der Tatsache, dass (5.24) gegen einen konstanten Vektor strebt, den Eigenvektor mit dem grössten Eigenwert, wird aus jedem weiteren Iterationsschritt immer weniger neue Information für die Erweiterung des Vektorraumes gewonnen, diese Sequenz ist also denkbar ungeeignet, um den Krylov-Unterraum zu beschreiben. Die nachfolgend vorgestellte Modellordnungsreduktion basiert auf der numerisch stabileren Berechnung einer Basis des Krylov-Unterraumes, dem sogenannten Arnoldi-Verfahren. Ausserdem wird eine Projektion verwendet, um die Ordnungsreduktion zu erreichen, im Gegensatz zur direkten Momentenanpassung von AWE.

Die folgende Beschreibung des Projektionsverfahrens PRIMA (Passive Reduced-order Interconnect Macromodeling Algorithm) ist inhaltlich an die Darstellungen in [94] und [97] angelehnt.

5.2.1 Projektionsbasierte Modellordnungsreduktion

Auch hier dient das Zustandsraummodell (5.7) als Ausgangspunkt. Die Basistransformationsmatrix S sei die orthonormale Basis, welche aus den normierten Eigenvektoren von A besteht. Mit der Diagonalisierung $A = S\Lambda S^{T}$ erhält man mittels z(t) = Sx(t) die transformierte Zustandsraumdarstellung

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) = \mathrm{diag}(\lambda_{1},\ldots,\lambda_{n})\boldsymbol{z}(t) + \tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{S}\boldsymbol{z}(t).$$
(5.25)

Diese Basistransformation lässt eine einfache Interpretation für eine Modellordungsreduktion zu. Die Fragestellung hierfür lautet: Welche Zustände in (5.25) können vernachlässigt werden, ohne dass sich dabei die Ausgänge $\boldsymbol{y}(t)$ bei gegebenem Eingang $\boldsymbol{u}(t)$ wesentlich ändern. Falls diese Zustände eliminiert werden, erhält man ein reduziertes Zustandsraummodell

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{V}_{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_{q}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{V}_{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)
\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}_{q}\tilde{\boldsymbol{x}}(t).$$
(5.26)

der Grösse q. Die rechteckige $n \times q$ -Matrix V_q stellt eine Projektion des ursprünglichen Vektorraums von x in den reduzierten Raum \tilde{x} dar. Falls die Projektionsmatrix V_q die Basisvektoren aus dem entsprechenden Krylov-Unterraum beinhaltet, werden durch die Näherung (5.26) die ersten q/N Momente des ursprünglichen Systems erhalten bleiben, N ist hierbei die Anzahl der Ein- und Ausgänge. Einen Beweis dieser Eigenschaft findet man z. B. in [94]. Damit ergibt sich eine ähnliche Näherung wie für das AWE-Verfahren, bei dem die Momente des ordnungsreduzierten Modells explizit angepasst wurden.

5.2.2 Das Block-Arnoldi Verfahren

Um die Basis V_q des Krylov-Unterraums zu bestimmen, wird ein stabiles iteratives Verfahren verwenden, das sogenannte Block-Arnoldi Verfahren. Die Block-Version des Verfahrens ist deshalb nötig, da der Krylov-Unterraum für mehrere Ein- und Ausgänge gleichzeitig bestimmt werden soll. Für Systeme mit einem einzigen Port könnte das herkömmliche Arnoldi-Verfahren verwendet werden. Anstatt einfacher Vektoren $V_0 =$ (v_0, v_1, \ldots, v_n) generiert das Block-Arnoldi Verfahren die Basisvektoren blockweise

$$\boldsymbol{V}_q = (\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{V}_1, \dots, \boldsymbol{V}_q), \qquad (5.27)$$

wobei sämtliche Basisvektoren, d. h. sämtliche Spalten von V_q , orthonormal zueinander sind. Jeder der Blöcke in (5.27) enthält N Vektoren, d. h. nach q Iterationen stehen $N \cdot q$ Basisvektoren zur Verfügung. Eine einfache Form des Block-Arnoldi Verfahrens lautet ([94] oder [97]) BlockArnoldi $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}_0)$ $V_0 = \operatorname{qr}(\boldsymbol{X}_0)$ 1 2for $j = 1 \dots q/N$ do $V_i^0 = AV_{i-1}$ 3 for $i = 1 \dots j$ do 4 $\boldsymbol{H}_{j-i,j-1} = \boldsymbol{V}_{j-i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V}_{j}^{i-1}$ 5 $oldsymbol{V}_{i}^{i}=oldsymbol{V}_{i}^{i-1}-oldsymbol{V}_{j-i}oldsymbol{H}_{j-i,j-1}$ 6 7 end for $V_i^j = \operatorname{qr}(V_i)$ 8 9 end for return $V_q = (V_0, \ldots, V_q)$.

In Zeile 1 wird der Startvektor X_0 durch eine QR-Dekomposition initial orthonormiert, $X_0 = QR$. Dabei werden von der orthonormalen Matrix Q nur die ersten N Spalten verwendet, die restlichen n - NSpaltenvektoren und die rechteckige $n \times q$ Matrix R werden nicht weiter benötigt. Innerhalb der Schleife aus Zeile 2 wird die Basis des Krylov-Unterraums iterativ und blockweise aufgebaut. Die hoch- und tiefgestellten Indizes sollen die Blockstruktur von V verdeutlichen. Die Zeilen 5-6 enthalten eine modifizierte Gram-Schmidt Orthogonalisierung, wobei die neu im Block V_j entstehenden Vektoren gegen sämtliche bereits vorhandenen Blöcke von Basisvektoren orthogonalisiert werden. Im letzten Schritt in Zeile 8 werden schliesslich die neuen Basisvektoren V_j untereinander orthogonalisiert.

Im Gegensatz zum einfachen Arnoldi-Prozess kann es beim Block-Arnoldi Verfahren geschehen, dass bei der Iteration der Suchraum der Basisvektoren bereits ausgeschöpft wurde, was bedeutet, dass in der QR-Orthonormalisierung ein Vektor mit verschwindender Norm erzeugt wird. Wie dieser Fall abgefangen werden kann, ist in [98] beschrieben. Ausserdem steht die Matrix A typischerweise nicht explizit zur Verfügung, sondern nur eine Faktorisierung A = LU. Zusätzlich wird in [97] vorgeschlagen, dass eine wiederholte Ausführung des Gram-Schmidt Prozesses (Zeilen 5-6) eine verbesserte Genauigkeit ergibt. Die hier verwendete Implementierung ist im Anhang B angegeben.

5.2.3 PRIMA

Basierend auf dem Block-Arnoldi Verfahren² wurden viele unterschiedliche projektionsbasierte Ordnungsreduktionsverfahren vorgeschlagen. Besondere Aufmerksamkeit hat der Algorithmus PRIMA (Passive Reduced Interconnect Macromodeling Algorithm, [99]) seit dessen Einführung im Jahr 1998 erhalten. Die besondere Eigenschaft von PRIMA ist, das die Passivität eines Systems nach der Ordnungsreduktion erhalten bleibt. Die Generierung von passiven Modellen ist eine Grundvoraussetzung, dass ein ordnungsreduziertes Modell in einem Zeitbereichs-Schaltungssimulator weiterverwendet werden kann.

Passivität bedeutet in diesem Sinne, dass – unabhängig von der externen Beschaltung eines Modells – modellintern keine Energie generiert werden kann. Die Energiebilanz zwischen den Ein- und Ausgängen und den internen Energiespeichern muss stets erfüllt sein. Die nötige Theorie und Beweise zur Passivität sind in [97] und [99] ausgeführt. Hier sollen nur die grundlegenden Gleichungen von PRIMA gezeigt werden. Die Passivität dieser Projektionsmethode folgt aus zwei Voraussetzungen:

• PRIMA ist eine Projektionsmethode, deren Projektionsmatrix V_q beispielsweise aus dem Block-Arnoldi-Verfahren gewonnen werden kann. Im Gegensatz zu anderen Projektionsmethoden wird diese aber direkt auf (5.6) und nicht auf (5.7) angewandt. Das ordnungsreduzierte Modell ergibt sich damit zu

$$V_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{E} \boldsymbol{V}_q \frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{V}_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{V}_q \tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{V}_q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F} \boldsymbol{u}(t)$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C} \boldsymbol{V}_q \tilde{\boldsymbol{x}}(t) .$$

(5.28)

Dies stellt eine doppelte Matrix-Projektion dar, es werden beide Matrizen $\tilde{E} = V_q^{\mathrm{T}} E V_q$ und $\tilde{G} = V_q^{\mathrm{T}} G V_q$ explizit berechnet.

• Für RLC-Modelle erfordert PRIMA eine passive Formulierung der Netzwerkgleichungen. Diese Formulierung haben wir in (2.9) und (2.15) bereits verwendet:

$$\begin{pmatrix} C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & \mathcal{A} \\ -\mathcal{A}^{\mathrm{T}} & L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_{\mathrm{s}} \\ v_{\mathrm{s}} \end{pmatrix}.$$
(5.29)

²Alternativ wird auch häufig das Lanczos-Verfahren verwendet, worauf hier nicht weiter eingegangen wird. Das Lanczos-Verfahren ist ein zweiseitiger Prozess, d. h. es werden zwei Basen V und W^{T} für die Projektion verwendet.

Die Multiplikation der zweiten Blockzeile aus (5.29) ergäbe die symmetrische Systemmatrix

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{d}t}^{\mathrm{d}} & \boldsymbol{\mathcal{A}} \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{L}_{\mathrm{d}t}^{\mathrm{d}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{i}_{\mathrm{s}} \\ -\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

welche die nicht-passive Formulierung der MNA-Gleichungen darstellt. Die passive Formulierung besitzt eine symmetrisch positivdefinite Energiespeichermatrix

$$\boldsymbol{E} = \left(\begin{array}{cc} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L} \end{array}\right) \,, \tag{5.31}$$

da sowohl die Induktivitätsmatrix L als auch die Kapazitätsmatrix C jeweils symmetrisch positiv definit sind. Dies ist eine Eigenschaft, welche für die Erhaltung der Passivität durch PRIMA erforderlich ist [97].

Für den ersten Punkt ist noch folgendes anzumerken: Die Berechnung der Block-Momente V_q des Arnoldi-Verfahrens geschieht anhand der Matrix $A = (G - sE)^{-1}$. Hier stellt $s = 2\pi f$ den Entwicklungspunkt der Momentanpassung dar. Durch eine Variation von s können die entsprechenden Frequenzbereiche mehr oder weniger gut angepasst werden. Oft wird s = 0 gewählt, damit die stationäre Lösung zwischen ordnungsreduziertem Modell und dem Original exakt übereinstimmt.

Mit dem Entwicklungspunkgt s = 0 ist jedoch zu beachten, dass G invertierbar sein muss. In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, dass die Inzidenzmatrix \mathcal{A} einen unvollständigen Spaltenrang besitzt. Über das Knotenpotentialverfahren gilt damit, dass auch die Basis von \mathcal{ARA}^{T} unvollständig ist. Für thermische FDM-Verfahren wird über Kopplungskapazitäten ins Unendliche eine invertierbare Systemmatrix garantiert. Zur Modellordnungsreduktion im Entwicklungspunkt s = 0 ist jedoch die Matrix G nicht ohne weiteres invertierbar. Damit PRIMA für thermische Modelle brauchbare Ergebnisse liefert ist zwingend eine Temperaturrandbedingung oder eine Konvektionsrandbedingung im Modell erforderlich. Bei elektromagnetischen PEEC Modellen gilt entsprechend, dass ein geerdeter Widerstand oder eine geerdete Quelle im Modell vorhanden sein muss.

Im nächsten Abschnitt werden Beispiele gezeigt, welche die Qualität der Ordnungsreduktion mittels PRIMA demonstrieren. Für thermische FDM-Modelle (RC-Netzwerke) wäre PRIMA zur Passivitätserhaltung

nicht unbedingt nötig, da hier auch die gewöhnlichen Projektionsverfahren passive Modelle erzeugen würden. Es hat sich jedoch gezeigt, dass PRIMA neben der Passivität noch den Vorteil besitzt, Modelle besserer Qualität/Genauigkeit zu erzeugen [97]. Zusätzlich vereinfacht die Verwendung derselben Methoden zur Ordnungsreduktion in GeckoHEAT und GeckoEMC dessen Implementierungs- und Wartungsaufwand.

5.3 Anwendungsbeispiele

Zur Veranschaulichung werden nachfolgend Beispiele zur Anwendung der gezeigten Algorithmen zur Modellordnungsreduktion vorgestellt, und die Lösungen der ursprünglichen Systeme mit dem reduzierten System verglichen. Da für das Krylov-Verfahren keine leicht zu berechnende Fehlerabschätzung existiert, wird der Einfluss der reduzierten Modellgrösse auf die Genauigkeit der Ergebnisse durch eine Variation der reduzierten Modellgrösse untersucht. Ein zweiter Reduktionsschritt mittels balancierter Abschneidung liefert schliesslich sehr kompakte Modelle.

5.3.1 Thermische Modellordnungsreduktion

Im Abschnitt 4.7 wurde bereits ein einfaches Modell eines Leistungsmoduls vorgestellt. Für dieses Referenzmodell wird hier das PRIMA-Verfahren angewendet und ein ordnungreduziertes Modell mit 5 Ports erstellt. Die Ports entsprechen den gegebenen Randbedingungen, d. h. 4 Leistungsquellen auf den Halbleiterpositionen und einer Konvektionsrandbedingung am Boden der Basisplatte. Die Randbedingungen selbst sind nicht Teil des ordnungsreduzierten Modells, sie werden ausschliesslich als externe Beschaltung des ursprünglichen und des reduzierten Modells verwendet.

Um die grundsätzliche Funktionalität der Ordnungsreduktion sicherzustellen, wird zunächst ein Modell relativ hoher Ordnung erzeugt; die Anzahl der Momente q für jeden Port ist hier 32. Für ein Modell mit p = 5 Ports erhält man eine reduzierte Modellgrösse von $\tilde{n} = p \cdot q = 160$ Systemvariablen. Das ursprüngliche Modell besitzt die Grösse n = 5400mit 15 000 thermischen Widerständen und 4400 Wärmekapazitäten. Die thermischen Sprungantworten des ursprünglichen Modells und Simulation nach der Ordnungsreduktion sind in Abbildung 5.4 gegenübergestellt. Es handelt sich hier um dasselbe Modell wie in Abbildung 4.15.



Abb. 5.4: Vergleich der Ergebnisse des Originalmodells mit q = 32 (durchgezogene Linien) mit der ordnungsreduzierten Simulation (gepunktet). Der relative Fehler der Temperaturen ist bezogen auf die Umgebungstemperatur, d. h. $\epsilon_{\rm r} = |T_{\rm MOR} - T_{\rm orig}|/(T_{\rm orig} - T_{\rm amb.})$.

Die jeweiligen Ergebnisse lassen sich kaum unterscheiden, der maximale Fehler beträgt nur $\Delta T = 1 \,\mu$ K. Dieser Restfehler hat neben der Approximation durch das Krylov-Verfahren noch eine zweite wesentliche Ursache: Auf dem Gebiet der leistungseinspeisenden Randbedingungen ist die Temperatur nicht eindeutig definiert, sondern man hat verschiedene Möglichkeiten diesen Wert aus der FDM-Simulation zu gewinnen.

Einerseits könnte die Temperatur im Mittelpunkt der beheizten Fläche verwendet werden, dies würde der maximalen Temperatur im Gebiet der Randbedingung entsprechen (siehe hierzu Abbildung 4.4, Seite 115). Andererseits erscheint der arithmetische Mittelwert der Temperaturknoten eine sinnvolle Temperaturdefinition des Chips zu sein.

Bei einem Vergleich mit den ordnungsreduzierten Simulationsergebnissen spielt die Frage nach der zu messenden Temperatur eine sehr subtile Rolle, denn es wird die gesamte Randbedingung zu einem einzelnen Knoten oder einer einzelnen Zustandsvariablen reduziert. Die Tatsache, dass die ursprüngliche Randbedingung Wärmeleistung in mehrere Knoten einspeist bzw. aus mehreren Knoten bezieht, wird durch die Eingangsmatrix F in der Systemgleichung (5.28) und der Multiplikation mit der Projektionsmatrix V_q berücksichtigt. Die Ausgangsmatrix C aus Gleichung (5.6) legt die Temperaturmessung fest. Üblicherweise wird die Ausgangsmatrix zu $C = F^{T}$ gewählt, d. h. Eingang und Ausgang sind identisch. Dadurch wird eine symmetrische und konsistente Definition eines bidirektionalen Ports erreicht, der sowohl als Eingang wie auch als Ausgang des Systems dient. Verwendet man nur einen einzelnen Knoten zur Leistungseinspeisung oder Kühlung, wird die Definition einer geeigneten Temperaturmessung trivial, und die Lösung aus Abbildung 5.4 würde noch stark an Genauigkeit gewinnen. Für thermische Modelle ist eine Leistungseinspeisung in einzelne Knoten jedoch nicht sinnvoll, da die transienten Temperaturverläufe damit von der Zellgrösse abhängig werden.

Für die Modellordnungsreduktion elektromagnetischer PEEC-Modelle spielt die Definition der Energieeinspeisung und der Messpunkte eine untergeordnete Rolle, da die Leitung des elektrischen Stromes unmittelbar im gesamten Modell innerhalb eines Stromkreises erfolgt. Thermische Modelle besitzen aufgrund der modellierten Wärmekapazitäten eine geringe Diffusivität, sodass die Fläche, die zur Wärmeeinspeisung verwendet wird, sehr relevant ist.

Genauigkeit der Ordnungsreduktion bei variabler Systemgrösse

Im Gegensatz zu TBR-basierten Reduktionsmethoden ist für das PRIMA-Verfahren, und allgemein für die meisten Krylov-Unterraumverfahren, keine geeignete und einfache numerische Abschätzung der Qualität der Ordnungsreduktion bekannt. Dies führt dazu, dass a priori keine Aussage über die benötigte Grösse des reduzierten Systems gemacht werden kann. Allerdings sind Krylov-Verfahren sehr effizient, sodass der Softwarebenutzer durch eine Variation der reduzierten Modellgrösse schnell testen kann, welche Anzahl der Momente q verwendet werden muss, um genügend genaue Ergebnisse zu erhalten. Letztendlich ist eine Wahl der reduzierten Modellgrösse immer ein Kompromiss zwischen Simulationsgenauigkeit und der dafür benötigen Simulationsdauer. Dies soll nun anhand des Referenzbeispiels demonstriert werden.

Abbildung 5.5 zeigt den relativen Fehler $\epsilon_{\rm r}$ der Schrittantwort des Referenzmodells für verschiedene Systemgrössen \tilde{n} . Mit abnehmender Modellgrösse \tilde{n} sinkt zwar die Genauigkeit der Approximation, jedoch ist das Ergebnis selbst mit q = 4 Momenten noch so genau, dass sich zu


Abb. 5.5: Approximationsfehler ϵ_r der Ordnungsreduktion bei variabler Systemgrösse $\tilde{n} = p \cdot q$ mit p = 5 und q = 16, 8, 4.

Beginn der Sprungantwort – also bei einer kurzen Simulationszeit – ein maximaler Fehler von nur 0.2 °C ergibt. Für längere Simulationszeiten reduziert sich der Fehler gegen einen vernachlässigbar kleinen Wert.

Im stationären Zustand ($t = 30 \,\mathrm{s}$ in Abbildung 5.5) ist der Fehler für alle Werte q identisch. Theoretisch sollte dieser Fehler im stationären Zustand sogar verschwinden, da das 0'te Moment des PRIMA-Verfahrens exakt demjenigen des Originalmodells entspricht. Der dennoch vorhandene Restfehler ist vermutlich auf den oben diskutierte Unterschied der Temperaturmessung zurückzuführen.

Implementierung und Skalierung im Schaltungssimulator

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, ist das Referenzmodell mit 5 Randbedingungen und einer Systemgrösse von $\tilde{n} = 20$ bereits relativ genau. Im Hinblick auf die generelle Anwendbarkeit wird nachfolgend die Skalierung der Simulation ordnungsreduzierter Modelle mit ansteigender Zahl der Randbedingungen, also für mehr als 4 Chips, besprochen. Die Implementierung der Zustandsraumgleichung (5.28) ist trivial, es kann zur Lösung der Differentialgleichungen eine der in Abschnitt 2.1.2 gezeigten Integrationsmethoden verwendet werden.

In [100] wird die Skalierung von thermischen Foster-Modellen für ein 36-Chip Leistungsmodul diskutiert. Dabei wurde festgestellt, dass die Simulation eines 36-Chip-Moduls – selbst unter Verwendung der vereinfachten Foster-Modelle – unrealistisch hohe Simulationszeiten erfordern würde. [100] verwendet zur Lösung der Differentialgleichungen einen direkten Solver. Der Rechenaufwand ist dabei $\mathcal{O}(n^3)$ für eine Matrix-Faktorisierung und $\mathcal{O}(n^2)$ für einen einzelnen Lösungsschritt im Gleichungssystem. Da die Faktorisierung nur einmal zu Beginn der Simulation durchgeführt werden muss, sind die Abschätzungen mittels $\mathcal{O}(n^3)$ in [100] zu pessimistisch. Dennoch erhält man bei einer Skalierung von $\mathcal{O}(n^2)$ des direkten Solvers für Multi-Chip-Module einen schlecht handhabbaren Simulationsaufwand. Typische Zahlenwerte sind hierfür in Tabelle 5.1 angegeben.

Analysiert man die Matrix-Struktur thermischer Foster-Modelle, so erkennt man, dass der direkte Solver hierfür eine sehr naive Lösungsmethode ist. Es handelt sich dabei um eine tridiagonale Matrix, für welche man mit dem Thomas-Algorithmus [69] eine Lösung innerhalb von $\mathcal{O}(n)$ erhält, sodass der Speicher- und Rechenaufwand zur Lösung des thermischen Modells unwesentlich wird, selbst bei einer sehr grossen Anzahl von Foster-Netzwerken.

Aufgrund der unphysikalischen Natur von Foster-Modellen wurde im vorherigen Abschnitt die Modellreduktion mittels Projektionsverfahren verwendet. Im Gegensatz zur Foster-Modellierung wie in [100] hat dies den Vorteil, dass sich damit separate reduzierte Modelle auch sinnvoll

$\begin{array}{c} \operatorname{Modellgr{\"o}sse} \\ n \end{array}$	Faktorisierung $t \propto \mathcal{O}(n^3)$	$\begin{array}{c} \text{Lösung} \\ t \propto \mathcal{O}(n^2) \end{array}$	$k \cdot \text{Lösung}$ $t \propto \mathcal{O}(n^2)$
100	$40\mu { m s}$	$120\mu{ m s}$	$120\mathrm{s}$
1000	$40\mathrm{ms}$	$12\mathrm{ms}$	$20\mathrm{min}$
10000	$40\mathrm{s}$	$1.2\mathrm{s}$	$33\mathrm{h}$
100 000	11 h	$2 \min$	140 d

Tabelle 5.1: Skalierung der Simulationszeit eines direkten Solvers (LU-Zerlegung). Für die Anzahl der Simulationsschritte wurde $k = 10^6$ angenommen.

kombinieren lassen. Für thermische Modelle mit mehreren Randbedingungen p (z. B. Multi-Chip-Module) erhält man Ordnungsreduktionen der Grösse $\tilde{n} = p \cdot q$. Die Systemmatrizen der Zustandsraumdarstellung sind jedoch dicht besetzt, sodass sich ein Sparse-Solver nicht vorteilhaft einsetzen lässt. Damit gelten die Simulationszeiten aus Tabelle 5.1 für die projektionsbasierte Modellreduktion.

Wie man der Tabelle entnehmen kann, hängt die benötigte Simulationszeit empfindlich von der Zahl der Variablen ab. Zwei Massnahmen können dazu beitragen die Simulationszeit weiter zu verkürzen:

- 1. Verwendung eines Solvers mit variabler Zeitschrittweite: Thermische Modelle besitzen im Vergleich zu elektrischen Modellen sehr grosse Zeitkonstanten. Dadurch bietet sich an, dass die Schrittweite $\Delta t_{\rm th}$ der thermischen Simulation wesentlich grösser gewählt wird als diejenige der Schaltungssimulation. Die Leistungseinspeisung ist entweder relativ konstant (Leitverluste) oder erfolgt pulsförmig (Schaltverluste). Möchte man den Temperaturverlauf bis auf die Schaltverluste auflösen, kann durch die Wahl einer variablen Simulationsschrittweite der Simulationsaufwand wesentlich reduziert werden.
- 2. Verwendung des TBR-Verfahrens zur weiteren Systemreduktion: Wie vorher bereits erwähnt wurde, liefert das TBR-Verfahren optimale reduzierte Modelle, ist jedoch numerisch sehr ineffizient. Das durch das PRIMA-Verfahren bereits reduzierte System kann jedoch ohne grösseren Aufwand durch die Anwendung des TBR-Verfahrens weiter komprimiert werden. Letztere Möglichkeit wird im Folgenden anhand des thermischen Referenzbeispiels durchgeführt.

TBR-Verfahren zur zweiten Ordnungsreduktion

Als Ausgangssystem der zweiten Stufe der thermischen Ordnungsreduktion wird das reduzierte System des thermischen Referenzmodells mit p = 5 Ports, q = 8 und der Gesamtmodellgrösse $\tilde{n} = p \cdot q = 40$ verwendet. Der Modellfehler des PRIMA-Verfahrens ist $\epsilon < 1 \%_0$ (Abbildung 5.5), und das Modell soll durch das TBR-Verfahren weiter reduziert werden.

Die Sprungantwortergebnisse und deren Fehler sind für drei kleiner werdende Modellgrössen \hat{n} in Abbildung 5.6 eingetragen. Bemerkenswert ist, dass selbst eine Modellgrösse von $\hat{n} = 5$ noch passable Er-



Abb. 5.6: Zweite Stufe der Ordnungsreduktion mittels TBR: Das durch PRIMA reduzierte 5-Port Modell der Grösse \tilde{n} wird weiter reduziert, der dabei entstehende Fehler der Sprungantwort des Chips 1 ist angegeben.

gebnisse liefert, denn das Modell hat auch 5 Eingänge. Eine weitere Reduktion macht keinen Sinn; die Qualität der Ergebnisse würde sich sehr verschlechtern. Diese gute Näherung bei einigen wenigen Modellzuständen ist für das Referenzmodell möglich, da sich die Sprungantwortkurven gut durch die Summe weniger Exponentialfunktionen darstellen lassen. Komplexere Modelle könnten deshalb grössere Abweichungen bei einer Reduktion zu dieser Grösse zeigen.

Die Eingangsmodellgrösse des TBR-Verfahrens von $\tilde{n} = 40$ stellt vom numerischen Aufwand her keinerlei Problem dar, erst ab $\tilde{n} = 1000$ macht sich der Rechenaufwand zur Lösung der Lyapunov-Gleichung bemerkbar. Aus Sicht des Softwareanwenders könnte die Vorgehensweise zur thermischen Modellierung folgendermassen gewählt werden:

- 1. Aufbau eines thermischen 3D FDM-Modells mittels GeckoHEAT, mit einer Modellgrösse im Bereich von $n = 10\,000\ldots 10^6$.
- 2. Modellordnungsreduktion mit dem PRIMA-Verfahren auf die reduzierte Modellgrösse $\tilde{n} = 40...1000$, wobei im vorliegenden Fall $\tilde{n} = 1000$ Freiheitsgrade ein strenges oberes Limit darstellt, grösse-

re Modelle sind weder vom Schaltungssimulator direkt noch durch das TBR-Verfahren handhabbar. Die Systemmatrizen des reduzierten Modells werden von GeckoHEAT in eine Datei exportiert.

3. Import der Systemmatrizen in GeckoCIRCUITS. Bei Bedarf kann das importierte Modell durch das TBR-Verfahren weiter reduziert werden. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass der Benutzer sehr flexibel zwischen verschiedenen Modellgrössen und Approximationsgenauigkeiten wählen und wechseln kann. Beim Erstellen und Debuggen des kombinierten elektrisch-thermischen Modells ist beispielsweise nur eine geringe Modellgrösse erforderlich.

Anwendungsbeispiel: Dreiphasiger Inverter

Als abschliessendes Beispiel wird die Anwendung des ordnungsreduzierten Modells anhand eines dreiphasigen Umrichters gezeigt. Das einfache Umrichtermodell wurde in der Software GeckoCIRCUITS implementiert, siehe Abbildung 5.7 und Tabelle 5.2. Die Ausgangsleistung des Umrichters beträgt P = 18 kW, sämtliche Schalt- und Leitverluste der IGBTs und Dioden addiert ergeben im Mittel die Verlustleistung von $P_{\rm loss} = 600$ W. Die drei roten Blöcke in der Abbildung enthalten jeweils ein ordnungsreduziertes thermisches Modell der Grösse $\tilde{n} = 20$.

Die simulierten elektrischen und thermischen Grössen sind in Abbildung 5.8a-b) gezeigt. Der Simulationsaufwand für die Simulation von 50 Netzperioden, entsprechend einer Sekunde, bei einer Schrittweite von $\Delta t = 1 \,\mu$ s beträgt nur 30 Sekunden.

In Abbildung 5.8c-d) sind die Temperaturverläufe für die zwei ordnungsreduzierten Modellgrössen $\tilde{n} = 20$ und $\tilde{n} = 10$ gegenübergestellt. Der genaue Kurvenverlauf beider Simulationen ist leicht unterschiedlich, da das Modell mit $\tilde{n} = 10$ die einzelnen Verlustpulse nicht mehr auflösen kann. Der über eine Pulsperiode gemittelte Temperaturwert ist in beiden Fällen jedoch nahezu identisch. Oft ist man am genauen Kurvenverlauf innerhalb eines Schaltzykluses nicht interessiert, deshalb sollte die Ordnungsreduktion mit $\tilde{n} = 10$ ausreichend genau sein. Würde man die gezeigten Kurven aus Abbildung 5.8 stark vergrössern, wären Temperatursprünge durch die Schaltverluste nicht ersichtlich. Das ordnungsreduzierte Modell ist für Zeitkonstanten im Bereich von 1 μ s bereits zu sehr vereinfacht; dennoch werden die Schaltverluste im Mittel korrekt berücksichtigt.



Abb. 5.7: GeckoCIRCUITS Simulationsmodell eines 18 kW Dreiphasen-Wechselrichters. Die roten Block-Symbole enthalten jeweils ein ordnungsreduziertes thermisches Modell, welches aus dem thermischen FDM-Solver GeckoHEAT mithilfe des PRIMA-Verfahrens gewonnen wurde.



Abb. 5.8: Elektrische a) und thermische Grössen b) des Simulationsmodells aus Abbildung 5.7. Die Grafen c) und d) zeigen die Temperaturverteilungen bei t = 1 s mit jeweils unterschiedlichen reduzierten thermischen Modellgrössen \tilde{n} .

Eingangsspannung, Ausgangsleistung	600 V, P = 18 kW
Schaltfrequenz, Ausgangsfrequenz	$f_{\rm S} = 1000 {\rm Hz}, f_{\rm M} = 50 {\rm Hz}$
Verlustleistung, Wirkungsgrad	$P_{\rm loss} = 600 {\rm W}, \eta = 0.97$
Flussspannungen Diode und IGBT	$U_{\rm F,D} = U_{\rm F,IGBT} = 0.6\rm V$
Leitwiderstände	$R_{\rm on,D} = R_{\rm on,IGBT} = 4\rm m\Omega$
Schaltverlust-Konstante IGBT	$k_{\rm on} = k_{\rm off} = 8 {}^{mJ}\!/_{\rm A\cdot V}$

Tabelle 5.2: Modellparameter des Simulationsmodells aus Abbildung 5.7. Es handelt sich hierbei um keinen real exisitierenden Umrichter. Das Modell wurde ausschliesslich zu Testzwecken erstellt und ist deshalb relativ einfach gehalten.

Typ/Bezeichnung	FF450R12KE4, 62mm C-series module with trench/fieldstop IGBT and optimized EmCon Diode		
Kollektor-Emitter-Spannung	1200 V		
DC-Kollektorstrom	520 A		
Peak-Kollektorstrom	900 A		
maximale Verlustleistung	$1200\mathrm{W}$		
maximale Gate-Emitter-Spannung	$20\mathrm{V}$		
interner Gate-Widerstand	1.9 Ω		
Stromanstiegszeit	$0.25\mu{ m s}$		
Stromabfallzeit	$0.19\mu{ m s}$		
Basisplatten-Material	Kupfer		
Steuinduktivität $L_{\rm sCE}$	20 nH		
Terminal-Widerstand	$0.7 \mathrm{m}\Omega$ pro Chip		

Tabelle 5.3: Datenblatt-Kennwerte des Infineon IGBT Leistungsmoduls FF450R12KE4.

5.3.2 Elektromagnetische Modellordnungsreduktion

Als Anwendungsbeispiel des PRIMA-Verfahrens in Kombination mit dem PEEC-Solver GeckoEMC wird nachfolgend das IGBT Leistungsmodul FF450R12KE4 von Infineon analysiert. Die wichtigsten Datenblatt-Kennwerte des Moduls sind in Tabelle 5.3 angegeben, es handelt sich um eine Halbbrücke mit antiparallelen Dioden, wobei jede Brückenhälfte jeweils aus 4 parallelen IGBT-Chips und 4 Dioden besteht. Für die Analyse der layoutbedingten Streuinduktivitäten wurde das Modul zunächst geöffnet und das Silikon-Gel entfernt, siehe Abbildung 5.9 a-d).

Der Aufbau der Halbleiter-Chips auf der Basisplatte ist spiegelsymmetrisch in horizontaler und vertikaler Richtung (Abbildung 5.9 b). Die Führung der Bonddräte ist jedoch so gestaltet, dass sich eine asymmetrische Stromführung ergibt. Die Pfade der oberen (HS) und unteren (LS) Gateströme sind in Abbildung 5.9 ersichtlich. Für die parasitäre Induktivität der unteren Gateanschlüsse ist deshalb ein wesentlich grösserer Wert zu erwarten als für die oberen Gateanschlüsse.

Im Leistungspfad befindet sich der gemeinsame Emitter/Kollektor-Anschluss nicht an der zentralen Klemme, sondern am vom Gatestecker abgewandten Anschluss. Deshalb ist die parasitäre Induktivität des Leistungspfades in der oberen Brückenhälfte wesentlich grösser als diejenige der unteren Brückenhälfte.



Abb. 5.9: Verschiedene Ansichten des modellierten IGBT Leistungsmoduls FF450R12KE4 von Infineon.



Abb. 5.10: Dreidimensionales Simulationsmodell des Leistungsmoduls a) in der Software GeckoEMC und b) der FEM-Software Maxwell3D.



Abb. 5.11: Vergleich der Simulationsergebnisse: Die Induktivität der unteren Gate-Verbindung in Abhängigkeit der Frequenz.

3D-Modelle eines Leistungsmoduls

Das Modul-Layout wurde nach dem Öffnen des Gehäuses sorgfältig vermessen, um aus diesen geometrischen Daten 3D-Modelle zu erstellen. Zur Validierung der Simulationsergebnisse wurde dabei dasselbe Modell in drei verschiedenen 3D-Solvern implementiert: Maxwell3D, In-Ca3D und GeckoEMC. Maxwell3D ist ein Finite-Elemente-Programm, wogegen InCa3D und GeckoEMC auf dem PEEC-Ansatz basieren. Abbildung 5.10 zeigt Bildschirmfotos des Leistungsmodul-Modells in Maxwell3D und GeckoEMC.

Prinzipiell lassen sich aus den 3D-Modellen sämtliche parasitären Eigenschaften des Modul-Layouts bestimmen. Als Beispiel sind in Abbildung 5.11 die Simulationsergebnisse für die Gate-Induktivität der unteren Brückenhälfte gezeigt, der Einfluss der Basisplatte wurde dabei im Modell noch nicht berücksichtigt. Die jeweils aus den drei Solvern stammenden Werte stimmen innerhalb von 10% überein. Die Induktivität wird mit zunehmender Frequenz aufgrund des Skin-Effekts geringer, auch hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung der verschiedenen Simulationsprogramme.

Maxwell3D hat die grössten Abweichungen der Ergebnisse, diese Abweichung ist darauf zurückzuführen, dass sich die Bonddrähte mit dem kleinem Durchmesser von d = 0.4 mm in einem Finite-Elemente-Solver

Software	$L_{\rm G,LS}$ (100 Hz)	$L_{\rm G,LS}$ (1 MHz)	Speicher- bedarf	Simulations- zeit	Modell- grösse
Maxwell3D	$147.8\mathrm{nH}$	$142.2\mathrm{nH}$	$580\mathrm{MB}$	$1\mathrm{h}20\mathrm{min}$	$1.3\cdot 10^5$ Tetr.
InCa3D	$144.0\mathrm{nH}$	$135.0\mathrm{nH}$	N.A.	$35\mathrm{s}$	990 Knoten
GeckoEMC	$139.1\mathrm{nH}$	134.0 nH	$50\mathrm{MB}$	$25\mathrm{s}$	802 Knoten

Tabelle 5.4: Vergleich der Simulationsergebnisse, Speicherbedarf und Simulationszeit der Software-Pakete Maxwell3D, InCa3D und GeckoEMC.

nicht optimal modellieren lassen. Um den Einfluss des Bonddrahtdurchmessers auf die FEM-Ergebnisse zu zeigen, wurde dessen Durchmesser im Maxwell3D-Modell um den Faktor $\sqrt{2}$ verkleinert (blau gepunktete Kurve in Abbildung 5.11). Hierdurch steigt die Gesamtinduktivität wesentlich an, d. h. die Ergebnisse der FEM-Simulation hängen sehr empfindlich von diesem Parameter ab.

Neben den Ergebnissen selbst sind die jeweiligen Simulationszeiten der Software-Werkzeuge erwähnenswert (Tabelle 5.4). Finite-Elemente-Solver müssen ein sehr feines Gitter aus Tetraeder-Zellen aufbauen, um eine ausreichende Genauigkeit der Simulation zu erhalten, und um die Konvergenz des Solvers sicherzustellen. Zusätzlich wird im FEM-Solver das Volumen des Simulationsmodells vollständig durch Tetraederzellen ausgefüllt, wodurch sich ein Modell mit sehr vielen Variablen ergibt; der Simulationsaufwand ist deshalb um Grössenordnungen höher ist als bei PEEC-Solvern.

Als Motivation für die Anwendung des PRIMA-Verfahrens ist in Abbildung 5.12 die Skalierung der Rechenzeit von PEEC-Modellen eingetragen. Dabei wurde das Modell des Leistungsmoduls in GeckoEMC und InCa3D mit der Basisplatte verwendet, wobei die Zellenauflösung der Basisplatte immer weiter vergrössert wurde. Für eine PEEC-Simulation im Frequenzbereich ist für jeden Frequenzschritt die Matrixgleichung (2.15) mit komplexen Einträgen zu lösen. Da sich mit variabler Frequenz $\omega = 2\pi f$ die Matrixeinträge jeweils ändern, muss bei jedem Schritt eine vollständige Faktorisierung durchgeführt werden. Ausserdem sind die Kopplungsmatrizen L und P dicht besetzt, sodass nur ein direkter Solver in Frage kommt. Die Skalierung mit der Anzahl der Knoten ist deshalb $\mathcal{O}(n^3)$. GeckoEMC verwendet einen direkten Matrix-Solver (LU-Faktorisierung), der mehrere Prozessoren des Computers verwendet. Dennoch wächst bei PEEC-Modellen mit mehr als 10 000 Knoten die benötigte Rechenzeit stark an.



Abb. 5.12: Skalierung der PEEC Frequenzbereichssimulation: Das Modell des Leistungsmoduls wurde mit ansteigender Knotenzahl simuliert, dabei wurden k = 20 Frequenzschritte f_k verwendet. Sowohl GeckoEMC als auch InCa3D skalieren aufgrund des direkten Solvers mit $\mathcal{O}(n^3)$.

PRIMA-Ordnungsreduktion des IGBT-Modells

Anhand des PEEC-Modells könnte man durch Einspeisung von Referenzströmen in die jeweiligen Klemmen des Leistungsmoduls die Impedanzen bestimmen. Eine ähnliche Vorgehensweise wurde in Abschnitt 3.1 bereits für ein Press-Pack Leistungsmodul durchgeführt. Versucht man die parasitären Elemente in einen Schaltplan einzuzeichnen, würde sich ein Diagramm ähnlich der Abbildung 5.13 ergeben. Man sieht jedoch sehr schnell ein, dass eine zweidimensionale Darstellung problematisch ist. Die parasitären Induktivitäten werden vereinfacht durch die Fläche definiert, die der geschlossene Strompfad einschliesst. Diese Flächen sind in Abbildung 5.13 für die Gate-Induktivität a) und die Induktivität des Leistungspfades b) grau dargestellt.

Die Abbildung zeigt hier nur die Hälfte des Brückenzweiges, würde man sowohl den oberen als auch den unteren Schalter mit parasitären Induktivitäten in eine Schaltung einzeichnen, ergibt sich schnell ein sehr unübersichtliches Bild. Deshalb ist es sinnvoller – anstatt eines vereinfachten Schaltplans – einen Satz von ordnungsreduzierte Transferfunktionen zu berechnen, welche sich direkt aus dem PEEC-Modell mithilfe des vorher besprochenen PRIMA-Verfahrens gewinnen lassen. Diese Transferfunktionen, bzw. das dazugehörige Zustandsraummodell lassen



Abb. 5.13: Vereinfachte Darstellung der parasitären Induktivitäten des Leistungsmoduls.

sich schliesslich in einem Schaltungssimulator mit einem detailliertem IGBT-Modell verwenden, um die Schalteigenschaften zu analysieren.

Das IGBT-Modul besitzt insgesamt 7 Anschlussklemmen, welche sich zwischen den zwei Gatekreisen und den zwei Leistungspfaden aufteilen. Deshalb wurde in GeckoEMC ein 4-Port-Modell erstellt, die Ports bestehen je paarweise aus einem Ein-und Ausgang an den Anschlussklemmen im Modell. Die durch das PRIMA-Verfahren gewonnene Modellordnungsreduktion ist durch die Bode-Diagramme in Abbildung 5.14 dargestellt. Hier werden wieder die Ergebnisse zweier Ordnungsreduktionen mit unterschiedlicher Anzahl der Momente (q = 4 und q = 8) miteinander verglichen. Bis auf kleine Abweichungen, insbesondere bei schwach wechselwirkenden Kopplungen, ist der Unterschied beider reduzierter Modelle noch gering.

Da sich die Übertragungsfunktionen bei kleinen Frequenzen resistiv und bei höheren Frequenzen rein induktiv verhalten, sind die entsprechenden Werte von L und R in einigen der Diagramme eingetragen. Würde man die Diagramme für höhere Frequenzen generieren, so würden aufgrund der kapazitiven Kopplungen auch Resonanzen erscheinen. Diese darzustellen ist jedoch kaum sinnvoll, da sie erst bei extrem hohen Frequenzen auftreten. Das Leistungsmodul wurde ohne dielektrischem Material (Silikon-Gel Füllung und Keramikisolation zwischen



Abb. 5.14: Bode-Diagramme (Impedanzen und Kopplungen) des ordnungsreduzierten 4-Port Modells des Leistungsmoduls. Grösse der reduzierten Modelle: q = 4 (grün) und q = 8 (blau) Momente.

den Chips und der Modulbodenplatte) modelliert, sodass die simulierten Resonanzfrequenzen grösser als die real auftretenden wären.

Betrachtet man die Impedanzverläufe der Gateanschlüsse genauer, kann der Gatewiderstand zu 1.9Ω abgelesen werden. Dieser Wert wurde so aus dem Datenblatt ins PEEC-Modell übernommen, und derselbe Wert ist auch nach der Ordnungsreduktion erhalten. Man beachte auch die Induktivitäten der Leistungspfade: Der untere Schalter weist laut Simulation eine Induktivität von L = 22 nH auf, im Datenblatt ist hierfür 20 nH angegeben, siehe hierfür Tabelle 5.3. Für die Induktivität des oberen Schalters findet man, wie nach Abbildung 5.9 zu erwarten war, einen grösseren Wert vor. Die Ergebnisse der PEEC-Simulation bzw. der Modellordnungsreduktion scheinen demnach in sich stimmig zu sein.

Das Ordnungsreduktionsverfahren bietet dem Software-Anwender im Vergleich zur herkömmlichen PEEC-Simuluation wesentliche Vorteile:

- 1. Impedanzen können automatisiert und systematisch bestimmt werden. Dafür ist alleinig die Definition der Ports im Modell durchzuführen.
- 2. Das reduzierte Modell lässt sich einfach in einen Schaltungssimulator integrieren, oder mit numerischen Methoden analysieren.
- 3. Die Extraktion des ordnungsreduzierten Modells ist wesentlich schneller als eine Frequenzbereichssimulation. Der Grund hierfür wird im nächsten Abschnitt gegeben.

Numerische Effizienz des PRIMA-Verfahrens

Die PEEC-Methode erfordert für einen Simulationsschritt im Frequenzbereich den Aufwand $\mathcal{O}(n^3)$, wobei *n* die Anzahl der zu modellierenden PEEC-Knoten ist. Für die PEEC-Modellordnungsreduktion mittels PRIMA müssen die folgenden Schritte ausgeführt werden:

- Aufstellung der PEEC Systemmatrizen und Berechnung der Matrixeinträge, $\mathcal{O}(n^2)$.
- Block-Arnoldi Iteration zur Generierung der Krylov Basisvektoren. Hierfür ist die Faktorisierung der Matrix $\boldsymbol{G} - s\boldsymbol{E}$ nötig, wobei s der Entwicklungspunkt der Momentanpassung ist. Betrachtet man die Struktur der Matrix \boldsymbol{G} aus den Gleichungen (5.28) und (5.30) erkennt man, dass \boldsymbol{G} sich aus der Inzidenzmatrix $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, $-\boldsymbol{\mathcal{A}}^{\mathrm{T}}$ und der Widerstandsmatrix \boldsymbol{R} bildet, die jeweils sehr dünn besetzt sind. Entwickelt man um den Punkt s = 0 im Frequenzspektrum,

kann für die Faktorisierung ein Sparse-Matrix-Solver verwendet werden, der um Grössenordnungen schneller ist als ein direkter Solver (siehe hierzu die Tabellen 4.6 auf Seite 135 und 5.1 auf Seite 170).

• Projektion der Systemmatrizen auf das reduzierte Modell. Der Berechnungsaufwand besteht aus dem Produkt symmetrischer Matrizen mit den Krylov-Basisvektoren, d. h. $\mathcal{O}(n^2 \cdot q)$.

Betrachtet man den maximalen Aufwand des PRIMA-Verfahrens erkennt man, dass die Ordnungsreduktion wesentlich schneller durchgeführt werden kann als ein einziger PEEC Frequenzsimulationsschritt. Das PRIMA-Verfahren kann damit auf PEEC-Modelle angewandt werden, ohne das die eigentliche PEEC-Simulation mit der aufwändigen Lösung der Matrixgleichung für jeden Frequenzschritt explizit durchgeführt wird. Dies kann beispielsweise beim Aufbau eines komplexen Simulationsmodells hilfreich sein, falls Zwischenresultate ohne eine langwierige Simulation gebraucht werden, um die Korrektheit des Modells sicherzustellen, bzw. Modellfehler zu finden.

Die Zustandsraummodelle der Ordnungsreduktion beinhalten jedoch ausschliesslich die Übertragungsfunktionen an den vordefinierten Ports. Möchte der Software-Anwender die Strom- oder Spannungsverteilungen im System darstellen, muss auf eine ausführliche PEEC-Simulation zurückgegriffen werden.

6 Zusammenfassung

Als Zielstellung dieser Arbeit wurde die Entwicklung einer Multi-Domain Simulationsplattform für die Leistungselektronik definiert. Neben der Schaltungssimulation von Konverter-Topologien und dem Reglerentwurf sind für das Systemdesign in der Leistungselektronik auch die thermischen Eigenschaften der Hardware und parasitäre elektromagnetische Effekte zu berücksichten. Hierfür wurden zwei netzwerkbasierte dreidimensionale Feldsimulatoren entwickelt.

Der elektromagnetische Solver GeckoEMC verwendet die PEEC-Methode, um layoutbedingte parasitäre Schaltungseigenschaften zu berechnen. Die Partial Element Equivalent Circuit Methode (PEEC) ist eine Netzwerkbeschreibung dreidimensionaler Leitergeometrien, die sowohl magnetische Kopplungen über eine Induktivitätsmatrix, als auch kapazitive Effekte zufolge des elektrischen Feldes einbezieht. PEEC-Modelle können aufgrund der zugrundeliegenden Netzwerkbeschreibung gleichermassen im Frequenz- wie auch im Zeitbereich verwendet werden. Eine detaillierte Herleitung und Beschreibung der PEEC-Methode ist in Kapitel 2 gegeben. Der grösste Simulationsaufwand zur Berechnung und Lösung von PEEC-Modellen ist zum Einen die genaue Auswertung der Matrixeinträge, andererseits ergeben sich sehr grosse und dicht besetzte Systemmatrizen, welche die Anwendung eines direkten Solvers erfordern. Für die Berechnung der Selbst- und Kopplungsinduktivitäten beliebig geformter und schiefwinklig angeordneter PEEC-Volumenzellen wurde in dieser Arbeit ein Integrationsverfahren entwickelt, das die schnelle und genaue Berechnung der Matrixeinträge ermöglicht. Anhand mathematischer Analogien lässt sich der Integrationsalgorithmus auf die Kapazitätsberechnung schiefwinkliger und beliebig angeordneter Oberflächenzellen übertragen. Für die Simulation der Bonddrähte von Leistungsmodulen, oder sonstiger Verdrahtungen eines dreidimensionalen Schaltungslayouts, sind zylinderförmige PEEC-Zellen vorteilhaft. Daher wurde die PEEC-Beschreibung auf zylindrische Zellen erweitert, die dafür nötigen analytischen Zusammenhänge zur Berechnung der PEEC-Matrixeinträge wurden zusammengestellt.

In Kapitel 3 sind zwei Anwendungsbeispiele des PEEC-Solvers gegeben. Zunächst wurde die transiente Stromverteilung innerhalb eines Press-Pack Leistungsmoduls berechnet, in welchem 12 parallel geschaltete IGBT-Chips den Strom führen. Asymmetrien in den durch die Verschaltung der Chips definierten Strompfaden führen hierbei über parasitäre Induktivitäten zu einer ungleichen Stromverteilung zwischen parallel liegenden IGBTs. Ausserdem hat die Rückkopplung des IGBT Leistungspfades über parasitäre Induktivitäten auf den Gatekreis einen Einfluss auf die Schaltgeschwindigkeit, bei asymmetrischer Gateverdrahtung wirkt sich dies zusätzlich auf die Stromverteilung innerhalb des Leistungsmoduls aus. Der Einfluss dieser Streuinduktivitäten auf die Stromverteilung, und damit auch der Einfluss auf die Verteilung der Verluste, wurde im Detail analysiert. Im zweiten Anwendungsbeispiel wurde ein Simulationsmodell für planare Rogowski-Spulen zur Strommessung entwickelt. Die Simulationsergebnisse des PEEC-Solvers tragen hier dazu bei eine optimierte Leiterführung des PCBs der Rogowski-Spule zu finden. Mit der Software GeckoEMC wurde sowohl die zu erwartende Performance der Stromsonde, als auch deren Sensitivität auf Störfelder bestimmt. Der auf einem PCB realisierte Prototyp der Rogowskispule wurde vermessen und mit den Ergebnissen der Simulation verglichen. Die Ergebnisse stimmen über einen weiten Frequenzbereich gut mit der Messung überein.

Das zweite Software-Werkzeug, das aus dieser Arbeit entstanden ist, ist das thermische Simulationstool GeckoHEAT, welches auf dem Finite-Differenzen-Verfahren (FDM) aufbaut. Damit ist eine schnelle Simulation der dreidimensionalen transienten Temperaturverteilung von Halbleiterkomponenten oder Leistungsmodulen anhand der Wärmeleitungsgleichung möglich. Es wurde gezeigt, dass das FDM-Verfahren ebenfalls eine Netzwerk-Beschreibung ist, welche dem PEEC-Ansatz sehr ähnelt. Die dafür nötigen Zusammenhänge und Gleichungen sind in Kapitel 4 dargestellt. Nichtlineare Modelleigenschaften, wie eine temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit, oder eine temperaturabhängige Wärmekapazität, lassen sich durch eine Analogie zwischen elektrischen und thermischen Grössen in das FDM Simulationsmodell mit einbeziehen. Es wurde ein effizientes Verfahren vorgestellt, dass die Simulation nichtlinearer (elektrischer) Kapazitäten in einem Schaltungssimulator erlaubt. Dasselbe Verfahren kann auch für den thermischen Solver verwendet werden. Die Leistungsfähigkeit des thermischen Solvers wurde anhand eines Referenzmodells gezeigt, welches ein vereinfachtes Leistungsmodul mit 4 Wärmequellen und einer Konvektions-Randbedingung als Wärmesenke an der Basisplatte darstellt. Durch den einfachen Aufbau des Referenzmodells ist ein Vergleich mit anderen thermischen Software-Werkzeugen leicht möglich. Die Diskretisierungsfehler des FDM-Modells in der Zeit- und Raumdimension wurden durch einfache Verfahren berechnet und visualisiert. Die Ergebnisse der Fehlerabschätzung zeigen, dass ein wesentlicher Teil des verwendeten 3D-Modells auch mit grösseren Zellen oder Simulationsschrittweiten noch genaue Ergebnisse liefert. Eine feine Zellenauflösung oder eine kleine Zeitschrittweite ist ausschliesslich in der Nähe der Randbedingungen nötig, über welche transient pulsförmige Leistung in das Modell geführt wird. Dies legt den möglichen Performance-Gewinn einer mathematischen Modellordnungsreduktion des thermischen Simulationsmodells nahe.

Aufgrund der Netzwerkbeschreibung der zuvor gezeigten elektromagnetischen und thermischen Simulationsmethoden wäre deren direkte Einbindung in einen Leistungselektronik-Schaltungssimulator ohne Weiteres möglich, womit die verschiedenen physikalischen Domänen und deren gegenseitige Kopplungen parallel simuliert werden könnten. Dies würde bei den typischen Simulationsschrittweiten in der Grössenordnung von 100 ns jedoch zu Simulationszeiten führen, die unrealistisch gross sind. Um dennoch eine schnelle Parallel-Simulation zwischen 3D-Feldsimulatoren und einem Schaltungssimulator zu ermöglichen, werden in Kapitel 5 verschiedene Möglichkeiten zur Modellordnungsreduktion diskutiert. Dabei wird als erstes auf die in der Leistungselektronik gebräuchlichen thermischen Cauer- und Foster Ersatznetzwerke eingegangen. Foster-Netzwerke sind rein signaltechnisch zu betrachten und besitzen keinerlei physikalischen Hintergrund, was häufig zu grundsätzlichen Modellierungsfehlern führt. Aufgrund der bekannten Schwächen von Foster- und Cauer Ersatznetzwerken wurde deshalb das mathematische Modellordnungsreduktionsverfahren PRIMA (Passive Reduced Interconnect Macromodelling Algorithm) verwendet, welches auf dem Krylov-Unterraumverfahren beruht. PRIMA ist sowohl für thermische FDM-Modelle als auch für elektromagnetische PEEC-Modelle extrem effizient, und liefert dennoch eine gute Übereinstimmung zwischen den Simulationsergebnissen der Originalmodelle und den ordnungsreduzierten Lösungen. Die Qualität der Ordnungsreduktion wurde jeweils für den thermischen und elektromagnetischen Solver anhand eines Beispiels gezeigt. Es hat sich gezeigt, dass selbst sehr kleine reduzierte Modelle noch sinnvolle Ergebnisse liefern. Thermische FDM-Modelle lassen sich z. B. für ein Leistungsmodul auf ein Zustandsraummodell mit 5-10 Variablen vereinfachen. Für die Praxis ist hierbei wichtig, dass kurzzeitige Wärmepulse, wie beispielsweise die Schaltverluste eines Leistungshalbleiters, zu Ergebnissen führen, die im Mittelwert korrekt sind. Je nach Grad der Ordnungsreduktion sinkt die maximale Signalfrequenz, die durch das Modell aufgelöst werden kann. Für elektromagnetische PEEC-Modelle und deren Ordnungsreduktion hat sich gezeigt, dass der Prozess zur Modellreduktion wesentlich schneller durchgeführt werden kann als die eigentliche Simulation des ursprünglichen Modells. Dies ermöglicht nicht nur die Weiterverwendung des reduzierten Modells in einem Schaltungssimulator; die Ordnungsreduktion an sich kann unter gewissen Voraussetzungen als Ersatz für eine langwierige PEEC-Simulation dienen.

Zusammenfassend wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Software-Paket erzeugt, welches eine Multi-Domänen-Simulation in Verbindung mit einem Schaltungssimulator zulässt. Die Kopplung der einzelnen Domänen und Programmteile findet dabei über schnelle und effiziente Modellordnungs-Reduktionsverfahren statt.

7 Ausblick

In dieser Arbeit wurde derselbe Lösungsansatz über diskrete Ersatzkomponenten sowohl für thermische (FDM) als auch elektromagnetische Probleme (PEEC) verwendet. Es hat sich gezeigt, dass sich der numerische Aufwand für Modelle, die ausschliesslich die Wärmeleitung berücksichtigen, relativ gering ist. Im Gegensatz dazu ist die Lösung der Systemgleichungen des elektromagnetischen Ansatzes wesentlich schwieriger. Die PEEC-Methode wird im Vergleich zu sonst üblichen FEM/FDM Simulationen deshalb relativ selten verwendet, obwohl der PEEC Ansatz an sich für viele Problemstellungen vorteilhaft ist. Die PEEC-Methode und dessen Verbesserung sind noch Gegenstand der aktuellen Forschung. Eine Auswahl aktueller Forschungsthemen ist:

- Modellierung permeabler Materialien: Für Toroidkerne [101] sowie für dünne Schichten permeablen Materials wurde bereits eine Erweiterung der PEEC-Methode entwickelt [102, 103]. Diese Ansätze basieren auf virtuellen Oberflächenströmen, welche im Modell die Regionen hoher Permeabilität ersetzen. Eine allgemeingültige Theorie, welche auf Induktivitäten mit beliebiger Kernform angewandt werden kann, ist momentan nicht bekannt.
- Für Modelle mit mehr als 10'000 Zellen wird der Speicher- und Rechenzeitbedarf enorm gross. Eine mögliche Lösung hierfür ist die Parallelisierung des Solvers, sodass die Ressourcen eines Clusters, d.h. einer Gruppe leistungsfähiger Computer, verwendet werden kann. Ein erster Versuch in diese Richtung wurde in [104] evaluiert. Wünschenswert ist jedoch, dass die Systemgleichungen durch mathematische Ansätze sowie Approximationen soweit modifiziert werden können, dass der Einsatz eines Matrixsolvers für dünnbesetzte Matrizen anwendbar wird. Erste Ansätze für die Beschleunigung des PEEC-Solvers sind in [24] und [105] beschrieben.

Die EMV-Simulation leistungselektronischer Systeme und eine Sensitivitätsanalyse der resultierenden Störspektren bezüglich der räumlichen Anordnung einzelner Baukomponenten, wie sie beispielsweise in [24] oder [106] beschrieben sind, ist heute leider noch weit von einem industriellen Einsatz entfernt. Der Hauptgrund hierfür ist sicherlich, dass die entsprechenden Softwarewerkzeuge noch nicht verfügbar sind oder deren Performance nicht genügend ist, um Ergebnisse in ausreichend schneller Zeit zu generieren.

Neben dem eigentlichen Simulationsaufwand ist auch der Arbeitsaufwand zur Erstellung der benötigten Simulationsmodelle nicht zu vernachlässigen. Auch hier sollte eine weitere Verbesserung und Automatisierung durch die entsprechenden Softwarewerkzeuge dazu beitragen, dass die EMV-Simulation zukünftig häufiger zum Einsatz kommt.

A Analytische Formeln zur Berechnung partieller Elemente

Wie in [31] und auf Seite 44 gezeigt, müssen die Matrixeinträge der partiellen Elemente relativ genau berechnet werden, um eine sinnvolle PEEC-Simulation zu gewährleisten. Dies bedeutet, dass analytisch bekannte Induktivitätswerte verwendet werden sollten, sobald es die geometrischen Verhältnisse zulassen. Im Folgenden sind einige der bekannten und analytisch exakten Formeln zur Berechnung der partiellen Elemente angegeben. Sobald eine der beteiligten Zellen keine orthogonale Geometrie besitzt, oder die Lage zweier Zellen schiefwinklig zueinander ist, muss jedoch auf eine numerische Integration zurückgegriffen werden, wie in Abschnitt 2.3.5 gezeigt. Die hierfür verwendeten Formeln der Kopplungsinduktivitäten zwischen beliebig angeordneten, schiefwinkligen Stromfilamenten sind deshalb auch angegeben.

Es werden hier nur partielle Induktivitäten berücksichtigt; aufgrund der Analogie zwischen Potentialkoeffizienten und partiellen Induktivitäten lassen sich die entsprechenden Potentialkoeffizienten über einen Umrechnungsfaktor $P = l_1 l_2 L_p / \epsilon_0 \mu_0$ bestimmen (siehe Kapitel 4.3). Hierbei ist jedoch zu beachten, dass für die Potentialkoeffizienten keine Richtungsabhängigkeit vorhanden ist, d.h. eine Stromrichtungsdefinition ist für Potentialkoeffizienten nicht erforderlich.

Alle hier gegebenen Formeln sind in SI-Einheiten angegeben, dadurch ergeben sich leichte Abweichungen im Vergleich zu den Formeln der Literaturangaben, welche oft auf das cgs-System bezogen sind, wie z.B. [30]. Eine ähnliche Zusammenfassung der analytischen Formeln findet man z.B. in [25]. Sämtliche hier angegebenen Ausdrücke sind mathematisch exakt, es muss jedoch bei deren Auswertung im Computer sehr darauf geachtet werden, dass Rundungsfehler, wie sie z.B. bei der Subtraktion vergleichbar grosser Beträge entstehen können, nicht überwiegen.

A.1 Kopplungsinduktivitäten orthogonaler Stromzellen

Die Kopplungsinduktivität zweier parallel angeordneter, aber sonst frei verschiebbarer Quader berechnet sich zu

$$L_{\rm p,mut} = \frac{\mu_0}{96\pi abcd} \left[\left[\left[F(x, y, z) \right]_{e+d-a, e}^{e-a, e+d}(x) \right]_{p+c-b, p}^{p-b, p+c}(y) \right]_{l_3+l_2-l_1, l_3}^{l_3-l_1, l_3+l_2}(z),$$
(A.1)

mit der Stammfunktion

$$F(x, y, z) = xf_1(y, z)f_2(x, y, z) + yf_1(z, x)f_2(y, z, x) + zf_1(x, y)f_2(z, x, y) + \frac{2}{5}f_4(x, y, z) [f_3(x, y) + f_3(y, z) + f_3(z, x)] - f_5(x, y, z) - f_5(y, z, x) - f_5(z, x, y).$$
(A.2)

Die verwendete Klammernotation soll die Auswertung der Stammfunktion an mehreren Stellen darstellen, d.h. es gilt

$$\begin{bmatrix} \left[\left[F(x,y,z) \right]_{q^{2},q^{4}}^{q_{1},q_{3}}(x) \right]_{r^{2},r^{4}}^{r^{1},r^{3}}(y) \end{bmatrix}_{s^{2},s^{4}}^{s^{1},s^{3}}(z)$$

= $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} (-1)^{i+j+k+1} F(q_{i},r_{j},s_{k}).$

Um den Ausdruck (A.2) in (A.1) weiter zu vereinfachen, wurden folgende Grössen zusammengefasst:

$$f_1(x,y) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4 \qquad f_2(x,y,z) = \ln\left(\frac{x + f_4(x,y,z)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$
$$f_3(x,y) = 3x^2y^2 - x^4 \qquad f_4(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$f_5(x,y,z) = 4xyz^3 \arctan\left(\frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$



Abb. A.1: Zwei quaderförmige PEEC-Volumenzellen, deren Kopplungsinduktivität $L_{p,mut}$ in Gleichung (A.1) angegeben ist [107]. Die hier gezeigten Bezeichnungen der Abstände und Längen werden auch für die Berechnung "entarteter" Zellen wie für die Selbstinduktivität oder die Kopplungsinduktivität unendlich dünner Stromstreifen verwendet.

Partielle Induktivität rechteckiger Flächen

Man könnte für jeden geometrischen Sonderfall, beispielsweise der Berechnung zweier paralleler, unendlich dünner Stromflächen (b = c = 0), vereinfachte analytische Formeln angeben. Die selben Ergebnisse erhält man jedoch, falls (A.1) sorgfältig implementiert wird, d.h. bei entarteten Längen wie b = 0 müssen die entsprechenden Terme in (A.1) und deren Grenzwerte korrekt ausgewertet werden. Daher soll auf eine Auflistung sämtlicher Sonderfälle verzichtet werden.

A.2 Selbstinduktivität quaderförmiger Zellen

Die Berechungsformel für die Selbstinduktivität quaderförmiger Stromzellen stammt aus [6], die Bezeichnung der Längen und Abstände sind wieder aus Abbildung A.1 ersichtlich, wobei in diesem Falle beide Zellen identisch sind. Laut [25] ist die Auswertung dieser Formel numerisch stabiler, anstatt die verallgemeinerte Gleichung (A.1) der Kopplungsinduktivitäten für zwei identische Zellen zu gebrauchen

$$\begin{split} L_{\rm p,mut} &= \frac{2\mu_0 l_1}{\pi} \left\{ \frac{\omega^2}{24u} \left[\ln\left(\frac{1+A_2}{\omega} - A_5\right) + \frac{1}{24u\omega} \left[\ln(\omega + A_2) - A_6\right] \right. \\ &+ \frac{\omega^2}{60u} (A_4 - A_3) + \frac{\omega^2}{24} \left[\ln\left(\frac{u+A_3}{\omega}\right) - A_7 \right] + \frac{\omega^2}{60u} (\omega - A_2) \right. \\ &+ \frac{1}{20u} (A_2 - A_4) + \frac{u}{4} A_5 - \frac{u^2}{6\omega} \arctan\left(\frac{\omega}{uA_4}\right) + \frac{u}{4\omega} A_6 \\ &- \frac{\omega}{6} \arctan\left(\frac{u}{\omega A_4}\right) - \frac{1}{6\omega} \arctan\left(\frac{u\omega}{A_4}\right) + \frac{1}{24\omega^2} [\ln(u+A_1) - A_7] \\ &+ \frac{A_7}{4} + \frac{u}{20\omega^2} (A_1 - A_4) + \frac{1}{60\omega^2 u} (1 - A_2) + \frac{1}{60u\omega^2} (A_4 - A_1) \\ &+ \frac{u}{20} (A_3 - A_4) + \frac{u^3}{24\omega^2} [\ln\left(\frac{1+A_1}{u}\right) - A_5] \\ &+ \frac{u^3}{24\omega} \left[\ln\left(\frac{\omega + A_3}{u} - A_6\right) \right] + \frac{u^3}{60\omega^2} (A_4 - A_1 + u - A_3) \right] \right\}. \end{split}$$
(A.3)

mit den Abkürzungen

$$u = \frac{l_1}{a}, \quad \omega = \frac{b}{a},$$

$$A_1 = \sqrt{1 + u^2}, A_2 = \sqrt{1 + \omega^2}, A_3 = \sqrt{u^2 + \omega^2}, A_4 = \sqrt{1 + u^2 + \omega^2},$$

$$A_5 = \ln\left(\frac{1 + A_4}{A_3}\right), A_6 = \ln\left(\frac{\omega + A_4}{A_1}\right), A_7 = \ln\left(\frac{u + A_4}{A_2}\right).$$

A.3 Berechnungsformeln für Kopplungsinduktivitäten beliebig angeordneter Stromfäden

Eine analytische Lösung für die Kopplungsinduktivität zwischen zwei parallelen, benachbarten Stromfäden findet man in [108], [109] und [30]. Da die angegebenen Referenzen sehr alt und in Bibliotheken schwer auffindbar sind, werden die benutzten Formeln hier im Sinne der Vollständigkeit angegeben und kurz diskutiert. Gleichungen (A.4) und (A.5) enthalten die nötigen Ausdrücke für die Berechnung der Kopplungsinduktivitäten $Lp_{\rm ff}()$, welche für die Volumenintegration der partiel-



Abb. A.2: Zwei beliebig angeordnete Stromfäden l und m und die für die Berechnung der Kopplungsinduktivität (A.4) benötigten geometrischen Winkel und Längen. Die zwei Ebenen E_1 und E_2 treten so durch die beiden Filamente hindurch, dass sie sich im rechten Winkel schneiden. Damit ist $s_{1,2}$ die Schnittlinie zwischen den Ebenen, welche parallel zum Stromfaden m ist. Die geometrische Anordnung ist durch die Angabe von sechs unabhängigen Parametern festgelegt, z.B. durch die Angabe von $R_{1...4}$, m und l.

len Induktivitäten und Koeffizienten des Potentials in Abschnitt 2.3.5 und 2.3.7 verwendet werden. Die für die Berechnung benötigten geometrischen Grössen sind in Abbildung A.2 dargestellt.

Die hier gegebenen Induktivitätsformel ist analytisch exakt. Trotzdem muss bei deren numerischer Auswertung auf mögliche Ausnahmen und Sonderfälle geachtet werden. Berühren sich die zwei Filamente in ihrem Endpunkt, so gilt z.B. $m = R_4$ und $R_3 = 0$. Dadurch wird eine Auswertung von $\tanh^{-1}(1)$ erforderlich, was undefiniert ist. Der Grenzwert, in diesem Falle

$$\lim_{\substack{R_4,\mu \to 0 \\ R_2 \to m}} \mu \tanh^{-1} \frac{m}{R_3 + R_4} \,,$$

ist aber stets wohldefiniert und endlich. Weitere entartete Fälle entstehen bei parallelen oder sich in einem Punkt schneidenden Filamenten, wobei die Brüche in (A.5) und die transzendenten Funktionen gegen ∞ streben, aber deren Grenzwert stets definiert ist. Bei einer sorgfältigen Implementierung mit einer speziellen Behandlung der Sonderfälle über Reihenentwicklungen der transzendenten Funktionen liefert (A.4) sehr zuverlässige und genaue Ergebnisse.

$$M = Lp_{\rm ff}(R_1, R_2, R_3, R_4) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \cos\varepsilon \iint \frac{\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{R}$$

= $2 \cdot 10^{-7} \cdot \cos\varepsilon [(\mu + l) \tanh^{-1} \frac{m}{R_1 + R_2} + (\nu + m) \tanh^{-1} \frac{l}{R_1 + R_4}$
 $-\mu \tanh^{-1} \frac{m}{R_3 + R_4} - \nu \tanh^{-1} \frac{l}{R_2 + R_3} - \frac{\Omega d}{2 \tan\varepsilon}]$
(A.4)

 mit

$$\Omega = \arctan \frac{d^2 \cos \varepsilon + (\mu + l)(\nu + m) \sin^2 \varepsilon}{dR_1 \sin \varepsilon} - \arctan \frac{d^2 \cos \varepsilon + (\mu + l)\nu \sin^2 \varepsilon}{dR_2 \sin \varepsilon} + \arctan \frac{d^2 \cos \varepsilon + \mu \nu \sin^2 \varepsilon}{dR_3 \sin \varepsilon} - \arctan \frac{d^2 \cos \varepsilon + \mu (\nu + m) \sin^2 \varepsilon}{dR_4 \sin \varepsilon}.$$
(A.5)

B Implementierung des Block-Arnoldi Verfahrens

Die Implementierung des Block-Arnoldi Verfahrens, wie es in Kapitel 5.2.2 angegeben wurde ist etwas unübersichtlich. Deshalb ist folgend der Sourcecode aufgelistet, wie er in GeckoEMC/GeckoHEAT implementiert wurde. Der Funktionsaufruf verwendet die Matrix-Faktorisierung $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \boldsymbol{U}$ und gibt die entsprechenden Block-Vektoren $V_{\boldsymbol{q}}$ zurück.

```
private double [][][] BlockArnoldi (final SparseMatrix lu,
                         final double [][] B, final int q) {
  int n = lu.getCols();
  int p = B[0].length;
  final double [][][] Vtot = new double [q + 1][][];
  final double [][] V = qr4mor(B);
  Vtot[0] = V;
  for (int j = 0; j < q; j++) {
      Matrix VMatj = new Matrix(Vtot[j]);
      double [][] W = new double [VMatj.rowDim()][VMatj.colDim()];
      Matrix WMat = new Matrix (W);
      for (int i = 0; i < W[0].length; i++) {
          double [] VMatRow = new double [VMatj.rowDim()];
          for (int ii = 0; ii < VMatRow.length; ii++) {
              VMatRow[ii] = Vtot[j][ii][i];
          }
          double [] res = lu.solve(VMatRow);
          for (int ii = 0; ii < VMatRow.length; ii++) {
              W[ii][i] = res[ii];
          }
      }
      for (int i = 0; i \le j; i++) {
          Matrix VMati = new Matrix(Vtot[i]);
          Matrix VMatiT = VMati.transpose();
          Matrix HMat = VMatiT.times(WMat);
          WMat.minusEquals(VMati.times(HMat));
      }
```

```
double[][] Vnew = qr4mor(WMat.getArray());
        Vtot[j + 1] = Vnew;
}
return Vtot;
}
```

Die Funktion BlockArnoldi verwendet eine abgewandelte Form der QR-Faktorisierung (qr4mor), bei der auf verschwindende Normen der Vektoren getestet wird. Die Theorie zu qr4mor ist in [98] diskutiert.

```
private static double[][] gr4mor(double[][] V) {
   double tol = 1e-5;
   int n = V. length;
   int m = V[0].length;
   double [][] \mathbf{R} = new double [n][m];
   double [][] Q = new double [n][m];
   int nrc = 0;
   int i = 0;
   while (i < m - nrc) {
     R[i][i] = norm(V, i, 1);
     for (int j = 0; j < n; j++) {
         Q[j][i] = V[j][i] / R[i][i];
     }
     double [] [] Rold = copy(R);
     double [] [] Vold = copy(V);
     //repeat MGS for better accuracy
     for (int k = 0; k < 2; k++) {
        for (int j = i + 1; j < m - nrc; j++) {
           R[i][j] = 0;
           for (int l = 0; l < Q. length; l++) {
               R[i][j] += Q[1][i] * V[1][j];
           }
           for (int l = 0; l < Q. length; l++) {
               V[1][j] = R[i][j] * Q[1][i];
           }
        }
     }
     if (i + 1 < m - nrc) {
        if (norm(V, i + 1, 1) < tol) \{ // Deflation! \}
           R = Rold;
           V = new double [Vold.length] [Vold [0].length - 1];
           for (int ii = 0; ii < V.length; ii++) {
                for (int jj = 0; jj < V[0].length; jj++) {
                    V[ii][jj] = Vold[ii][jj];
           for (int ii = i + 1; ii < V[0].length; ii++) {
```

```
for (int jj = 0; jj < V.length; jj++) {
                   V[jj][ii] = 0;
                }
           }
           double [][] Qold = Q;
           Q = new double [Qold.length] [Qold [0].length - 1];
           for (int ii = 0; ii < Q.length; ii++) {
               for (int jj = 0; jj < Q[ii].length; jj++) {
                   Q[ii][jj] = Qold[ii][jj];
                }
           }
           nrc++;
        }
     }
     i++;
   }
   return Q;
}
```

Literaturverzeichnis

- M. Hartmann, "Ultra-Compact and Ultra-Efficient Three-Phase PWM Rectifier Systems for More Electric Aircraft," Dissertation Nr. 19755, ETH Zürich, 2011.
- [2] U. Drofenik, D. Cottet, A. Müsing, and J. W. Kolar, "Design Tools for Power Electronics: Trends and Innovations," in *Proc. of* the 2nd Int. Conference on Automotive Power Electronics (APE), September 2007.
- [3] J. Biela, J. W. Kolar, A. Stupar, U. Drofenik, and A. Müsing, "Towards Virtual Prototyping and Comprehensive Multi-Objective Optimisation in Power Electronics," in *Proc. of the Int. Power Conversion and Intelligent Motion (PCIM) Conference Europe*, Nürnberg, Mai 2010.
- [4] T. Bechtold, E. Rudnyi, and J. Korvink, Fast Simulation of Electro-Thermal MEMS Efficient Dynamic Compact Models, Serie Microtechnology and MEMS comprises, H. Fujita and D. Liepmann, Hrsg., Springer, 2006.
- [5] A. E. Ruehli, "Equivalent Circuit Models for Three-Dimensional Multi-Conductor Systems," *IEEE Trans. on Microwave Theory* and Techniques, Nr. 22(3), S. 216–221, 1974.
- [6] A. E. Ruehli, "Inductance Calculations in a Complex Integrated Circuit Environment," *IBM Journal of Research and Development*, Nr. 16(5), S. 470–481, 1972.
- [7] I. Kovačević, A. Müsing, and J. W. Kolar, "PEEC Modeling of Toroidal Magnetic Inductor in Frequency Domain," in *Proc. of the Int. Power Electronics Conference (IPEC)*, Sapporo, Juni 2010.
- [8] I. Kovačević, T. Friedli, A. Müsing, and J. W. Kolar, "PEECbased Virtual Design of EMI Input Filters," in *Proc. of the 3rd IEEE Energy Conversion Congress (ECCE)*, Phoenix, USA, September 2011.

- [9] M. Kamon, M. J. Tsuk, and J. White, "FASTHENRY: A Multipole-Accelerated 3-D Inductance Extraction Program," *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Nr. 42(9), S. 1750– 1759, September 1994.
- [10] K. Nabors and J. White, "FastCap: A Multipole Accelerated 3-D Capacitance Extraction Program," *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Nr. 10(11), S. 1447–1459, November 1991.
- [11] http://www.fastfieldsolvers.com/
- [12] http://www.cedrat.com/en/software-solutions/inca3d.html
- [13] http://www.cst.com/Content/Products/SimLab/PCBMod.aspx
- [14] J. Ogrodzki, Hrsg., Circuit Simulation Methods and Algorithms. CRC Press Inc., 1994.
- [15] M. Patil, V. Ramanarayanan, and V. Ranganathan, Simulation of Power Electronic Circuits. Alpha Science International, 2009.
- [16] A. E. Ruehli, Hrsg., Circuit Analysis, Simulation and Design (Part 1): General Aspects of Circuit Analysis and Design, Serie Advances in CAD for VLSI. North-Holland, 1986, Band 3.
- [17] W. J. McCalla, Fundamentals of Computer Aided Circuit Simulation. The Kluwer International Series in Engineering and Computer Sciences, 1988.
- [18] C.-W. Ho, A. E. Ruehli, and P. Brennan, "The Modified Nodal Approach to Network Analysis," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Nr. 22(6), S. 504–509, Juni 1975.
- [19] G. Hachtel, R. Brayton, and F. Gustavson, "The Sparse Tableau Approach to Network Analysis and Design," *IEEE Trans. on Circuit Theory*, Nr. 18(1), S. 101–113, Januar 1971.
- [20] http://software.intel.com/en-us/articles/intel-mkl/
- [21] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 2. Ausgabe. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992.
- [22] S. Voigtmann, "General Linear Methods for Integrated Circuit Design," Dissertation, Humboldt-Universität zu Berlin, 2006.
- [23] G. Antonini and A. Orlandi, "Efficient Transient Analysis of Long Lossy Shielded Cables," *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Nr. 48(1), S. 42–54, Februar 2006.

- [24] M. L. Zitzmann, "Fast and Efficient Methods for Circuitbased Automotive EMC Simulation," Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 2007.
- [25] A. Görisch, "Netzwerkorientierte Modellierung und Simulation Elektrischer Verbindungsstrukturen mit der Methode der Partiellen Elemente," Dissertation, Universität Magdeburg, 2002.
- [26] M. E. Verbeek, "Partial Element Equivalent Circuit (PEEC) Models for On-Chip Passives and Interconnects," Int. Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, Nr. 17(1), 2004.
- [27] H. Heeb and A. E. Ruehli, "Retarded Models for PC Board Interconnects - Or How the Speed of Light Affects your SPICE Circuit Simulation," Int. Conference on Computer-Aided Design, Santa Clara, November 1991.
- [28] A. E. Ruehli, G. Antonini, J. Esch, J. Ekman, A. Mayo, and A. Orlandi, "Nonorthogonal PEEC Formulation for Time- and Frequency-Domain EM and Circuit Modeling," *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Nr. 45(2), S. 167–176, Mai 2003.
- [29] D. Gope, A. E. Ruehli, C. Yang, and V. Jandhyala, "(S)PEEC: Time- and Frequency-Domain Surface Formulation for Modeling Conductors and Dielectrics in Combined Circuit Electromagnetic Simulations," *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Nr. 54(6), S. 2453–2464, 2006.
- [30] F. W. Grover, *Inductance Calculations*. New York: Dover Publications Inc, 1973.
- [31] J. Ekman, G. Antonini, A. Orlandi, and A. E. Ruehli, "Impact of Partial Element Accuracy on PEEC Model Stability," *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Nr. 48(1), S. 19–31, Februar 2006.
- [32] A. Müsing, J. Ekman, and J. W. Kolar, "Efficient Calculation of Non-Orthogonal Partial Elements for the PEEC Method," *IEEE Trans. on Magnetics*, Nr. 45(3), S. 1140–1143, März 2009.
- [33] C. R. Paul, *Inductance: Loop and Partial*, IEEE Press, Hrsg., Wiley, November 2009.
- [34] M. Enohnyaket and J. Ekman, "PEEC Models for Air-Core Reactors Modeling Skin and Proximity Effects," in *Proc. of the Power Electronics Specialist Conference*, Juni 2007, pp. 3034–3038.

- [35] A. Müsing, C. Zingerli, and J. W. Kolar, "PEEC-Based Numerical Optimization of Compact Radial Position Sensors for Active Magnetic Bearings," in *Proc. of the 5th CIPS Conference*, 2008.
- [36] W. M. McKeeman, "Adaptive Numerical Integration by Simpson's Rule, Algorithm 145," *Communications of the American ACM*, Nr. 5(12), S. 604–605, 1962.
- [37] G. Antonini, J. Ekman, A. C. Scogna and A. E. Ruehli "A Comparative Study of PEEC Circuit Elements Computation," in *IEEE Int. Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Band 2, 2003, S. 810–813.
- [38] G. Antonini, J. Ekman, and A. Orlandi, "Integral Order Selection Rules for a Full Wave PEEC Solver," in *Proc. of the 15th Zurich Symposium on EMC*, Zürich, Februar 2003.
- [39] A. E. Ruehli, Hrsg., Circuit Analysis, Simulation and Design (Part 2): VLSI Circuit Analysis and Simulation, Serie Advances in CAD for VLSI. North-Holland, 1986, Band 3.
- [40] C. R. Paul and A. E. Feather, "Computation of the Transmission Line Inductance and Capacitance Matrices from the Generalized Capacitance Matrix," *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility*, Nr. 18(4), 1976.
- [41] G. Antonini, J. Ekman, and A. Orlandi, "PEEC Capacitance Calculations," in *Proc. of the IEEE Int. Symposium on EMC*, Boston, August 2003.
- [42] A. Müsing and J. Kolar, "Efficient Partial Element Calculation and the Extension to Cylindrical Elements for the PEEC Method," Proc. of the 11th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL), August 2008.
- [43] E. B. Rosa, "The Self and Mutual Inductances of Linear Conductors," Bulletin of the Buerau of Standards, Nr. 4(2), S. 301–344, 1907.
- [44] S. Eichler et al., "4.5 kV Press Pack IGBT Designed for Ruggedness and Reliability," in *IEEE IAS Annual Meeting*, Seattle, 2004.
- [45] G. Ortiz, J. Biela, D. Bortis, and J. W. Kolar, "1 Megawatt, 20 kHz, Isolated, Bidirectional 12 kV to 1.2 kV DC-DC Converter for Renewable Energy Applications," in *PProc. of the Int. Power Electronics Conference (IPEC)*, Sapporo, Juni 2010.
- [46] A. Müsing, G. Ortiz, and J. W. Kolar, "Optimization of the Current Distribution in Press-Pack High Power IGBT Modules," in *Proc. of the Int. Power Electronics Conference (IPEC)*, Sapporo, Juni 2010.
- [47] T. Guillod, D. Gerber, J. Biela, and A. Müsing, "Design of a PCB Rogowski Coil based on the PEEC Method," in Proc. of the Int. Conference on Integrated Power Electronics Systems (CIPS), Nürnberg, März 2012.
- [48] D. Bortis, J. Biela, and J. W. Kolar, "Active Gate Control for Current Balancing in Parallel Connected IGBT Modules in Solid State Modulators," in *Proc. of the 16th IEEE Int. Pulsed Power Conference*, Juni 2007, p. 1323 –1326.
- [49] N. E. Karrer, "Hochdynamische Erfassung Elektrischer Ströme über stossfrei verkoppelte Wandler," Nr. 14332, ETH Zürich, VDI Verlag, 2002.
- [50] A. E. Ruehli and H. Heeb, "Circuit Models for Three-Dimensional Geometries Including Dielectrics," *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Nr. 40, S. 1507–1516, Juli 1992.
- [51] R. N. Simons, Coplanar Waveguide Circuits, Components, and Systems, Wiley Series in Microwave and Optical Engineering. Wiley-Interscience, 2001.
- [52] F. Giezendanner, "Optimierung von elektronischen Vorschaltgeräten für Leuchtstoff- und Hochdrucklampen," Dissertation Nr. 19776, ETH Zürich, 2011.
- [53] U. Badstübner, "Ultra-High Performance Telecom DC-DC Converter," Dissertation 20354, ETH Zürich, 2012.
- [54] J. Mühlethaler, J. W. Kolar, and A. Ecklebe, "Loss Modeling of Inductive Components Employed in Power Electronic Systems," in Proc. of the 8th Int. Conference on Power Electronics ECCE Asia, 2011.
- [55] J. Mühlethaler, "Modeling and Multi-Objective Optimization of Inductive Power Components," Dissertation Nr. 20217, ETH Zürich, 2012.
- [56] W. Chen, X. Huang, and J. Zheng, "Improved Winding Loss Theoratical Calculation of Magnetic Component with Air-Gap," in Proc. of the 7th Int. Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC), Band 1, 2012.

- [57] P. L. Dowell, "Effects of Eddy Currents in Transformer Windings," in Proc. of the Institution of Electrical Engineers, Nr. 113(8), 1966.
- [58] J. Biela, "Optimierung des elektromagnetisch integrierten Serien-Parallel-Resonanzkonverters mit eingeprägtem Ausgangsstrom," Dissertation Nr. 16426, ETH Zürich, 2005.
- [59] U. Drofenik, I. Kovačević, R. Schmidt, and J. W. Kolar, "Multi-Domain Simulation of Transient Junction Temperatures and Resulting Stress-Strain Behavior of Power Switches for Long-Term Mission Profiles," in Proc. of the 11th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL), August 2008.
- [60] I. Kovačević, U. Drofenik, and J. W. Kolar, "New Physical Model for Lifetime Estimation of Power Modules," in *Proc. of the Int. Power Electronics Conference (IPEC)*, Juni 2010.
- [61] J. Crank, The Mathematics of Diffusion, 2. Ausgabe. Oxford University Press, 1975.
- [62] M. N. Ozisik, Finite Difference Methods in Heat Transfer. CRC-Press, 1994.
- [63] V. Paschkis and H. D. Baker, "A Method for Determining Unsteady-State Heat Transfer by means of an Electrical Analogy," *Trans. on ASME*, Nr. 64, S. 105–112, 1942.
- [64] F. Alhama, A. Campo, and J. Zueco, "Numerical Solution of the Heat Conduction Equation with the Electro-Thermal Analogy and the Code PSPICE," *Applied Mathematics and Computation*, Nr. 162(1), S. 103–113, März 2005.
- [65] J. P. Holman and S. Bhattacharyya, *Heat Transfer*, 9. Ausgabe. Taylor & Francis Group, LLC, 2008.
- [66] VDI-Wärmeatlas, VDI-Gesellschaft Verfahrenstechnik und Chemieingenieurwesen, Hrsg., Springer, 2006, Nr. 1.
- [67] Y. Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2. Ausgabe. The Society for Industrial and Applied Mathematics, Januar 2000.
- [68] M. R. Hestenes and E. Stiefel, "Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems," *Journal of research of the National Bureau of Standards*, Nr. 49, S. 409–436, 1952.
- [69] G. H. Golub and C. F. van Loan, *Matrix Computations*, 3. Ausgabe, The Johns Hopkins University Press, Hrsg., Johns Hopkins Studies in Mathematical Sciences, 1996.

- [70] I. S. Duff, A. M. Erisman, and J. K. Reid, *Direct Methods for Sparse Matrices*. Oxford University Press, 1989.
- [71] I. S. Duff, "Direct Methods," Rutherford Appleton Laboratory, Tech. Ber., 1998.
- [72] P. Poschmann, L. Komzsik, and S. Mayer. Direct Or Iterative? A Dilemma For The User. pdf file. The MacNeal-Schwendler Corporation. www.mscsoftware.com/support/library/conf/amuc98/ p02698.pdf
- [73] P. R. Amestoy, I. S. Duff, J. Koster, and J.-Y. L'Excellent, "A Fully Asynchronous Multifrontal Solver Using Distributed Dynamic Scheduling," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Nr. 23(1), S. 15–41, 2001.
- [74] T. Davis. http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack/
- [75] J. W. Demel, S. C. Eisentat, J. R. Gilbert, X. S. Li, and J. W. H. Liu, "A Supernodal Approach to Sparse Partial Pivoting," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Nr. 20, S. 720–755, 1999.
- [76] O. Schenk and K. Gärtner, "Solving Unsymmetric Sparse Systems of Linear Equations with PARDISO," *Journal of Future Generation Computer Systems*, Nr. 20, S. 475–487, 2004.
- [77] O. Schenk, "Efficient Sparse LU Factorization with Left-right Looking Strategy on Shared Memory Multiprocessors," Dissertation Nr. 13515, ETH Zürich, 2000.
- [78] O. Schenk, K. Gartner, and W. Fichtner, "Efficient Sparse LU Factorization with Left-right Looking Strategy on Shared Memory Multiprocessors," *BIT Numerical Mathematics*, Nr. 40(1), S. 158– 176, 2000.
- [79] J. A. Scott and Y. Hu, "Experiences of Sparse Direct Symmetric Solvers," CCLRC - Council for the Central Laboratory of the Research Councils, Tech. Ber., September 2005.
- [80] U. Drofenik, D. Cottet, A. Müsing, J.-M. Meyer, and J. W. Kolar, "Modelling the Thermal Coupling between Internal Power Semiconductor Dies of a Water-Cooled 3300V/1200A HiPak IGBT Module," in Proc. of the Int. Power Conversion and Intelligent Motion (PCIM) Conference Europe, Nürnberg, Mai 2007.

- [81] U. Drofenik, A. Müsing, and J. W. Kolar, "Voltage-Dependent Capacitors in Power Electronic Multi-Domain Simulations," in *Proc.* of the Int. Power Electronics Conference (IPEC), Sapporo, Juni 2010.
- [82] A. Müsing, M. L. Heldwein, T. Friedli, and J. W. Kolar, "Steps Towards Prediction of Conducted Emission Levels of an RB-IGBT Indirect Matrix Converter," in *Proc. of the 4th Power Conversion Conference*, April 2007.
- [83] M. Hartmann, A. Müsing, and J. W. Kolar, "Switching Transient Shaping of RF Power MOSFETs for a 2.5 MHz, Three-Phase PFC," in Proc. of the 7th Int. Conference on Power Electronics, 2007.
- [84] P. R. Strickland, "The Thermal Equivalent Circuit of a Transistor," *IBM Journal of Research and Development*, S. 35–44, 1959.
- [85] R. Stout, "Linear Superposition Speeds Thermal Modeling". Online Magazine Power Electronics Technology. http://powerelectronics.com/thermal_management/ thermal_management_simulation/702PET22.pdf
- [86] Y. Gerstenmaier, W. Kiffe, and G. Wachutka, "Combination of Thermal Subsystems Modeled by Rapid Circuit Transformation," in 13th Int. Workshop on Thermal Investigation of ICs and Systems (THERMINIC), September 2007, S. 115–120.
- [87] E. A. Guillemin, Synthesis of Passive Network. New York: Wiley, 1957.
- [88] L. Weinberg, Network Analysis and Synthesis. New York: McGraw-Hill, 1962.
- [89] P. E. Bagnoli, C. Casarosa, M. Ciampi, and E. Dallago, "Thermal Resistance Analysis by Induced Transient (TRAIT) Method for Power Electronic Devices Thermal Characterization—Part I: Fundamentals and Theory," *IEEE Trans. on Power Electronics*, Nr. 13(6), S. 1208–1219, November 1998.
- [90] B. N. Sheehan, "TICER: Realizable Reduction of Extracted RC Circuits," in ACM Int. Conference on Computer-Aided Design, November 1999.
- [91] M. M. Gourary, S. G. Rusakov, and S. L. Ulyanov, Network Reduction by Inductance Elimination," in *Model Reduction for Circuit Simulation*, Serie Lecture Notes in Electrical Engineering,

P. Benner, M. Hinze, and E. J. W. Maten, Hrsg., Springer, 2011, Band 74, S. 149–161.

- [92] P. Benner and A. Schneider, "Balanced Truncation Model Order Reduction for LTI Systems with many Inputs or Outputs," in Proc. of the 19th Int. Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Budapest, Juli 2010, S. 1971–1975.
- [93] A. C. Antoulas, Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. Society of Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005.
- [94] S. Tan and L. He, Advanced Model Order Reduction Techniques in VLSI Design. Cambridge University Press, 2007.
- [95] C. Mullis and R. Roberts, "Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed Point Digital Filters," *IEEE Trans. on Circuits and Sy*stems, Nr. 23(9), S. 551–562, September 1976.
- [96] L. Pillage and R. A. Rohrer, "Asymptotic Wave-Form Evaluation For Timing Analysis," Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Nr. 9(4), S. 352–366, 1990.
- [97] M. Celik, L. Pileggi, and A. Odabasioglu, *IC interconnect analysis*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [98] P. J. Heres, "Robust and Efficient Krylov Subspace Methods for Model Order Reduction," Dissertation, Eindhoven University of Technology, 2005.
- [99] A. Odabasioglu, M. Celik, and L. T. Pileggi, "PRIMA: Passive Reduced-Order Interconnect Macromodelling Algorithm," *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Nr. 17(8), S. 645–654, 1998.
- [100] U. Drofenik, D. Cottet, A. Müsing, J.-M. Meyer, and J. W. Kolar, "Computationally Efficient Integration of Complex Thermal Multi-Chip Power Module Models into Circuit Simulators," in *Proc. of the 4th Power Conversion Conference (PCC'07)*, Nagoya, April 2007.
- [101] I. Kovačević, A. Müsing, and J. W. Kolar, "An Extension of PEEC Method for Magnetic Materials Modeling in Frequency Domain," *IEEE Trans. on Magnetics*, Nr. 47(5), S. 910–913, Mai 2011.
- [102] H. Long, Z. Fong, H. Feng, A. Wang, and T. Ren, "magPEEC: Extended PEEC Modeling for 3D Arbitrary Electro-Magnetic Devices with Applications for M-Cored Inductors," in *Proc. of the IEEE Radio Frequency Integrated Circuits Symposium*, 2003.

- [103] G. Antonini, M. Sabatini, and G. Miscione, "PEEC Modeling of Linear Magnetic Materials," in *Proc. of IEEE Int. Symposium on EMC*, August 2006.
- [104] D. Daroui and J. Ekman, "Performance Analysis of Parallel Non-Orthogonal PEEC-based Solver for EMC Applications," *Progress In Electromagnetics Research B*, Nr. 41, S. 77–100, 2012.
- [105] D. Gope, A. E. Ruehli, and V. Jandhyala, "Speeding Up PEEC Partial Inductance Computations using a QR-based Algorithm," *IEEE Trans. on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, Nr. 15(1), S. 60–68, Januar 2007.
- [106] E. Hoene, A. Lissner, and S. Guttowski, "Prediction of EMI Behaviour in Terms of Passive Component Placement," in *Proc. of* the 18th Int. Zurich Symposium on EMC, München, 2007.
- [107] U. A. Shrivastava, "Fast and Accurate Algorithms for Calculation of Self and Mutual Inductances of Rectangular Conductors," in *Proc. of the Annual Int. Electronics Packaging Conference*, Nr. 8, November 1988.
- [108] F. F. Martens, "Über die gegenseitige Induktion und pondermotorische Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Rechtecken," Annalen der Physik, Nr. 343(10), S. 959–970, 1909.
- [109] G. A. Campbell, "Mutual Inductances of Circuits Composed of Straight Wires," *Physical Review*, Juni 1915.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Die Gecko-Softwareplattform	6
1.2	Bildschirmfoto des Schaltungssimulators GeckoCIRCUITS	6
2.1	Illustration einer Inzidenzmatrix	18
2.2	Verschiedene Diskretisierungen des Ableitungsoperators	25
2.3	Numerische Dämpfung der Integrationsverfahren	26
2.4	Veranschaulichung unterschiedlicher Basisfunktionen	30
2.5	PEEC Diskretisierung von Oberflächen- und Volumenzellen	31
2.6	PEEC Grundstruktur	34
2.7	Die Kopplungsinduktivität zweier Stromschleifen	40
2.8	Die partielle Kopplungsinduktivität zweier Leiterschleifen	42
2.9	Zusammenhang Kreisinduktivität \leftrightarrow partielle Induktivität	43
2.10	Zwei induktiv gekoppelte, schiefwinklige PEEC-Volumenzellen .	47
2.11	Singularität zweier induktiv gekoppelter Stromfäden	48
2.12	Zwei schiefwinklige PEEC Volumenzellen	49
2.13	Zwei schiefwinklige Oberflächenzellen	60
2.14	Diskretisierung für zylindrische PEEC Zellen	62
2.15	Bildschirmfoto der Software GeckoEMC	65
2.16	Impedanzkurve einer Toroidspule	66
2.17	Vergleich zwischen einer retardierten und quasistatischen Lösung	67
3.1	Press-Pack IGBT Modul Prüfstand	70
3.2	Explosionsansicht des Press-Pack IGBT-Moduls	70
3.3	Modulanordnungen	71
3.4	Press-Pack Anordnung als PEEC Modell	73
3.5	Stromaufteilung der IGBTs	73
3.6	Grundriss-Zeichnung des IGBT-Moduls	74
3.7	Press-Pack Anordnung als PEEC Modell	76
3.8	PEEC-Modell der Gateverbindungen	77
3.9	PEEC-Simulation der induzierten Gatespannungen beim Ein-	
	schaltvorgang	78
3.10	Gesamtschaltverhalten des Leistungsmoduls	79
3.11	Stromaufteilung im Leistungsmodul	80
3.12	Der Versuchsaufbau zur Strommessung	82
3.13	Ersatzschaltbild einer Rogowski-Spule	83

3.14	Windungsgeometrien der Rogowski-Spulen				84
3.15	Vergleich der gemessenen und simulierten Impedanzkurve				86
3.16	Messaufbaus mit Press-Pack IGBT Modul, Busbars und	de	er		
	Rogowski-Spule				86
3.17	Rogowski-Spule: Vergleich der Übertragungsfunktionen				87
3.18	Rogowski-Spule: Vergleich Messung \leftrightarrow Simulation				88
3.19	Typische Anordnung einer Induktivität mit Rundleitern .				89
3.20	Aufteilung einer Induktivität in Abschnitte				90
3.21	Ersatzwindung zur Modellierung eines Luftspaltes				91
3.22	Spiegelungsmethode zur Modellierung von Induktivitäten				91
3.23	Press-Pack IGBT Modul Prüfstand				92
3.24	Anwendung der Spiegelmethode auf PEEC-Zellen				97
3.25	Verlustberechnung mittels PEEC und Spiegelmethode	Ż	Ż	Ż	98
3.26	Verlustberechnung mit einfacher Spiegelung				101
00	for above commany mill commencer oprogering i fin the first	•	·	·	101
4.1	Berechnungs-Moleküle für FDM Diskretisierungen				107
4.2	Elektrisch-thermische Analogie				111
4.3	Transformation einer Spannungsquelle in eine Stromquelle				114
4.4	Konstantleistung als FDM-Randbedingung				115
4.5	Konvektions-Randbedingung				116
4.6	Spy-Diagram einer FDM-Matrix				118
4.7	Temperaturabhängigkeit der thermischen Leitfähigkeit λ .				122
4.8	Nichtlineare Wärmeleitfähigkeit durch gesteuerte Quellen				123
4.9	Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität				124
4.10	Spannungsabhängigkeit einer nichtlinearen Kapazität Coss				127
4.11	Entladekurve einer nichtlinearen Kapazität Coss				129
4.12	Beispielmodell für eine thermische FDM-Simulation	÷			131
4.13	Definition der Wärmequellen des Beispielmodells				131
4.14	Verläufe der mittleren Chip-Temperaturen				133
4.15	Thermische Sprungantwort des Beispielmodells				134
4.16	Stationäre Temperaturverteilung				135
4.17	Auswertung der Simulationszeit und des Speicherbedarfs.				137
4.18	Lokaler Abschneidefehlers des Integrationsalgorithmus				138
4.19	Anregung einer <i>RC</i> -Kette mit pulsförmigen Signalen				141
4.20	Visualisierung der zeitlichen FDM-Auflösung				143
5.1	Thermisches Foster-Netzwerk				148
5.2	Thermisches Cauer-Netzwerk				150
5.3	Knoten-Elimination nach dem TICER-Verfahren				152
5.4	Vergleich der Ergebnisse, Originalmodell und MOR				167
5.5	Approximationsfehler der Ordnungsreduktion				169
5.6	Zweite Stufe der Ordnungsreduktion mittels TBR				172
5.7	Dreiphasiger Wechselrichter				174

5.8	Elektrisch-thermische Ko-Simulation	75
5.9	Das IGBT-Leistungsmodul FF450R12KE4	77
5.10	3D Simulationsmodelle des Leistungsmoduls	77
5.11	Simulierte Induktivitäten $L_{G,LS}$ der unteren Gate-Verbindung . 1	78
5.12	Skalierung der PEEC Frequenzbereichssimulation 1	80
5.13	Parasitäre Layout-Induktivitäten	81
5.14	PRIMA-Modellordnungsreduktion, Bode-Diagramme 1	.82
A.1	Kopplungsinduktivität quaderförmiger Volumenzellen 1	.93
A.2	Kopplungsinduktivität beliebig angeordneter Stromfäden 1	.95

Tabellenverzeichnis

2.1	Koeffizienten verschiedener Integrationsmethoden
2.2	Vergleich der Integrationsmethoden für partielle Induktivitäten 51
2.3	Physikalische Eigenschaften des Beispiel-Toroids 64
3.1	Vergleich der Resonanzfrequenzen
3.2	2D-PEEC Modellparameter
4.1	Koeffizienten der Finite-Differenzen-Matrix
4.2	Elektrisch-thermische Analogie
4.3	Ausgewählte Wärmeübertragungskoeffizienten h
4.4	Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität
4.5	Abmessungen und physikalische Eigenschaften eines thermi-
	schen Beispielmodells
4.6	Auswertung der Rechenzeiten und des Speicherplatzbedarfs $\ .$. 135
5.1	Skalierung eines direkten Solvers
5.2	Modellparameter des Wechselrichters
5.3	Datenblatt-Werte des Leistungsmoduls FF450R12KE4 176
5.4	Vergleich der Rechenzeit verschiedener Simulationstools 179